幾何学の意味での量子化の一般化 2
固有値としてのホモロジー群系列

郷原 惇平 [1]，**廣田 祐士** [2]，**稲生 景水** [1]，**佐古 彰史** [1]

東京理科大学 [1]，**麻布大学** [2]

September 13, 2019

arXiv:1909.02361

Contents

モチベーション

- いろんな量子化を 1 つの圏の枠組みで捉えることができた．
- 色々な理論から 1 つの理論が選択される仕組みは圏論の枠組みで作れるか？
- 1 例としてハミルトニアン形式のようなものを考えたい．(固有値問題として扱いたい)
- 固有値問題を扱う圏論的な枠組みが B. Elias. and M. Hogancamp (2017) によって与えられた．

モチベーション

- いろんな量子化を 1 つの圏の枠組みで捉えることができた．
- 色々な理論から 1 つの理論が選択される仕組みは圏論の枠組みで作れるか？
- 1 例としてハミルトニアン形式のようなものを考えたい．（固有値問題として扱いたい）
- 固有値問題を扱う圏論的な枠組みが B. Elias. and M. Hogancamp (2017) によって与えられた．

モチベーション

- いろんな量子化を 1 つの圏の枠組みで捉えることができた．
- 色々な理論から 1 つの理論が選択される仕組みは圏論の枠組みで作れるか？
- 1 例としてハミルトニアン形式のようなものを考えたい．（固有値問題として扱いたい）
- 固有値問題を扱う圏論的な枠組みが B. Elias. and M. Hogancamp (2017) によって与えられた．

モチベーション

- いろんな量子化を 1 つの圏の枠組みで捉えることができた．
- 色々な理論から 1 つの理論が選択される仕組みは圏論の枠組みで作れるか？
- 1 例としてハミルトニアン形式のようなものを考えたい．(固有値問題として扱いたい)
- 固有値問題を扱う圏論的な枠組みが B. Elias. and M. Hogancamp (2017) によって与えられた．

数学的準備

定義 (複体)

$\mathscr{C}$ を加法圏とする．$\mathscr{C}$ の対象と射の列 $X = \{X^i, d_X^i\}$

$$X = \cdots \longrightarrow X^{i-1} \xrightarrow{d_X^{i-1}} X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

が条件

$$d_X^i \circ d_X^{i-1} = 0 \quad (\forall i \in \mathbb{Z})$$

を満たすとき，X を $\mathscr{C}$ における複体という．

定義 (複体の射)

$\mathscr{C}$ を加法圏とする．$X = \{X^i, d_X^i\}, Y = \{Y^i, d_Y^i\}$ を複体とする．X から Y への複体の射 $f\colon X \longrightarrow Y$ とは，$\mathscr{C}$ の射の列 $f = \{f^i \in \mathscr{C}(X^i, Y^i)\}$ であって，可換性

$$f^{i+1} \circ d_X^i = d_Y^i \circ f^i \quad (\forall i \in \mathbb{Z})$$

が成り立つ．複体の射の合成について，$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ を複体の射とするとき，合成を

$$g \circ f := \{g^i \circ f^i\}$$

で定義し，複体の恒等射を，

$$id_X = \{id_{X^i}\}$$

で与える．

定義 (複体の圏)

加法圏 $\mathscr{C}$ に対して，複体を対象とし，複体の射を射とする圏を複体の圏といい，$C(\mathscr{C})$ で表す．

定義 (シフト関手)

$X = \{X^i, d_X^i\}$ を圏 $\mathscr{C}$ の複体とする．$n \in \mathbb{Z}$ に対して，X を n シフトした複体 $X[n]$ を

$$X[n]^i = X^{i+n}, \quad d^i_{X[n]} = (-1)^n d_X^{i+n}$$

により

$$X[n] : \cdots \longrightarrow X^{i-n+1} \xrightarrow{(-1)^n d_X^{i-1+n}} X^{i+n} \xrightarrow{(-1)^n d_X^{i+n}} X^{i+1+n} \longrightarrow \cdots$$

と定義する．

定義 (写像錐)

$f\colon X \longrightarrow Y$ を加法圏 $\mathscr{C}$ における複体の射とする．このとき $\{Z^i, d_Z^i\}$ を，

$$Z := X[1] \oplus Y, \quad Z^i = X^{i+1} \oplus Y^i$$
$$d_Z^i = \begin{bmatrix} -d_{X[1]}^i & 0 \\ f^i[1] & d_Y^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_X^{i+1} & 0 \\ f^{i+1} & d_Y^i \end{bmatrix}$$

により定義すると，$Z = \{Z^i, d_Z^i\}$ はまた複体となる．これを f の写像錐といい $\mathrm{Cone}(f)$ で表す．

定義 (ホモトピー)

$\mathscr{C}$ を加法圏，$X=\{X^i,d_X^i\}, Y=\{Y^i,d_Y^i\}$ を $\mathscr{C}$ の複体，$f,g\colon X\longrightarrow Y$ を複体の射とする．このとき f から g へのホモトピー Φ とは，射の列 $\Phi=\{\Phi^i\colon X^i\longrightarrow Y^{i-1}\}$ であって，

$$f^i-g^i=d_Y^{i-1}\circ\Phi^i+\Phi^{i+1}\circ d_X^i \quad (\forall i\in\mathbb{Z})$$

を満たす．すなわち，

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^i \arrow[r, "d_X^i"] \arrow[dl, "\Phi^i"'] \arrow[d, "f^i-g^i"] & X^{i+1} \arrow[r] \arrow[dl, "\Phi^{i+1}"] & {} \\
Y^{i-1} \arrow[r, "d_Y^{i-1}"'] & Y^i \arrow[r] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

f から g へのホモトピーが存在するとき，f は g にホモトピックであるといい，$f\sim g, f\underset{\Phi}{\sim}g$ とかく．特に $f\sim 0$ をヌルホモトピックであるという．

定義 (ホモトピー圏)

$\mathscr{C}$ をプレ加法圏とし，$C(\mathscr{C})$ をその複体のなす圏とする．すべての $X, Y \in ob(C(\mathscr{C}))$ に対して，

$$\mathscr{N}_{X,Y} := \{f \in C(\mathscr{C})(X,Y) | f \sim 0\}$$

とする．この時，ホモトピー圏 $K(\mathscr{C})$ を

$$K(\mathscr{C}) := C(\mathscr{C})/\mathscr{N}$$

で定める．

定義 (ホモトピー同値)

圏 $\mathscr{C}$ の複体 $X, Y \in ob(C(\mathscr{C}))$ に対して，その間の射 $f \in C(\mathscr{C})(X,Y), g \in C(\mathscr{C})(Y,X)$ とホモトピー Φ, Ψ が存在して，

$$g \circ f \underset{\Psi}{\sim} id_X, \quad f \circ g \underset{\Phi}{\sim} id_Y$$

が成り立つとき，X と Y はホモトピー同値といい，$X \simeq Y$ で表す．

圏論的固有値

圏論的固有値について B. Elias. and M. Hogancamp (2017) を基に review を行う．以下，$\mathscr{K}$ を可換環の圏，$\mathscr{A}$ を代数の圏 (モノイダルホモトピー圏)，$\mathscr{V}$ を加群の圏とする．

定義 (固有対象)

複体 $F \in ob(\mathscr{A})$ を固定する．$\lambda \in ob(\mathscr{A})$ に対して，$\alpha \in \mathscr{A}(\lambda, F)$ が存在し，$\alpha \otimes id_M : \lambda \otimes M \to F \otimes M$ がホモトピー同値を与えるとき，$M (\neq 0) \in \mathscr{V}$ を F の α による固有対象と呼ぶ．

命題

複体 $F \in ob(\mathscr{A})$ を固定する．$\mathscr{A}$ の対象 λ と射 $\alpha : \lambda \to F$ に対して，$M \in ob(\mathscr{V})$ が固有対象であることは，$\mathrm{Cone}(\alpha) \otimes M \simeq 0$ と同値である．

例：可換環の固有値 I

可換環 A を，$A = \mathbb{Z}[x]/(x^2 - 1)$ とし，A 加群の複体として，

$$F = (0 \longrightarrow \underline{A} \xrightarrow{x-1} A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0)$$

を考える．ここで，下線は複体の列の 0 番目を表し，ε は $\varepsilon(ax+b) = a+b$ で定義する．このとき，写像 $\mathbb{Z} \longrightarrow A, 1 \mapsto 1+x$ は複体の射 $\alpha\colon \mathbb{Z} \longrightarrow F$ を誘導する．ただし，$\mathbb{Z}$ は 0 番目が $\mathbb{Z}$ で他は 0 の複体であるとする．この α に対する写像錐 $\mathrm{Cone}(\alpha)$ は $0 \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}, 0 \oplus A = A, \mathbb{Z} \oplus 0 = 0$ より，

$$\mathrm{Cone}(\alpha) = \mathbb{Z}[1] \oplus F = (0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{x+1} \underline{A} \xrightarrow{x-1} A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0)$$

例：可換環の固有値 II

と書ける．このとき A が固有対象ということを確かめる．すなわち $\alpha \otimes id_A : \mathbb{Z} \otimes A \xrightarrow{\sim} F \otimes A$ であることを示す．ホモトピーの自明なものは省略し，次のような図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \otimes A \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\alpha\otimes id_A"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \otimes A \arrow[r, "x-1\otimes id_A"] \arrow[d, "P_x\otimes id_A"'] & A \otimes A \arrow[r, "\varepsilon\otimes id_A"] \arrow[d] \arrow[ddl, "-P_x\otimes id_A"] & \mathbb{Z} \otimes A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddl, "-\iota\otimes id_A"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \otimes A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha\otimes id_A"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \otimes A \arrow[r, "x-1\otimes id_A"'] & A \otimes A \arrow[r, "\varepsilon\otimes id_A"] & \mathbb{Z} \otimes A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{1}
$$

例：可換環の固有値 III

ここで，$\iota\colon \mathbb{Z} \longrightarrow A$ を埋め込み，$P_x\colon A \longrightarrow A$ を $P_x(ax+b) = a$ と定義する．すると，上の図式は可換になることがわかる．
また，$\mathrm{Cone}(\alpha) \otimes A \simeq 0$ となることを確認する．$\mathrm{Cone}(\alpha) = \mathbb{Z}[1] \oplus F$ であるから，

$$\mathrm{Cone}(\alpha) = (0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow A \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0)$$

となり，

$$\mathrm{Cone}(\alpha) \otimes A = (0 \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes A \longrightarrow A \otimes A \longrightarrow A \otimes A \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes A \longrightarrow 0)$$

例：可換環の固有値 IV

を得る．このとき $\mathrm{Cone}(\alpha) \otimes A \simeq 0$ **が言えればよい．すなわち，**

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \otimes A \arrow[r, "\alpha\otimes id_A"] \arrow[d] & A \otimes A \arrow[r, "x-1\otimes id_A"] \arrow[d] \arrow[ddl, "P_x\otimes id_A"] & A \otimes A \arrow[r, "\varepsilon\otimes id_A"] \arrow[d] \arrow[ddl, "-P_x\otimes id_A"] & \mathbb{Z} \otimes A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddl, "-\iota\otimes id_A"] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \otimes A \arrow[r, "\alpha\otimes id_A"'] & A \otimes A \arrow[r, "x-1\otimes id_A"'] & A \otimes A \arrow[r, "\varepsilon\otimes id_A"'] & \mathbb{Z} \otimes A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

が可換になることを示せばよいが，図式 2 の射は，図式 1 と同じ射なので可換であることは明らかである．

(コ) ホモロジーと圏論的固有値の関係

定理 (J.G., Yuji Hirota, Ino Keisui and Akifumi Sako (2019))

$\mathscr{A}$ をモノイダルホモトピー圏とし，複体 $F \in ob(\mathscr{A})$ を固定する

$$F = (\cdots \to F_{n-1} \xrightarrow{\tilde{d}^F_{n-1}} F_n \xrightarrow{\tilde{d}^F_n} F_{n+1} \to \cdots).$$

また，複体 $\lambda \in \mathscr{A}$ を次のように与える

$$\lambda = (\cdots \to \lambda_{n-1} \xrightarrow{0} \lambda_n \xrightarrow{0} \lambda_{n+1} \to \cdots).$$

このとき $\alpha := \{f_n : \lambda_n \to (\mathrm{Im}\ \tilde{d}^F_{n-1})^{\perp} \subset F_n\} \in \mathscr{A}(\lambda, F)$ に対して，$\mathrm{Cone}(\alpha) \simeq 0$ が満たされるのは，任意の n に対して λ_n が F のコホモロジー群と同型の時，すなわち

$$\lambda_n = \frac{\ker \tilde{d}^F_n}{\mathrm{Im}\ \tilde{d}^F_{n-1}} = H_n(F)$$

が成り立つときに限る．

双対の場合についてもホモロジー群としてこの命題が成り立つ．ただし，写像錘のシフトは -1 となることに注意．

例:S^1 のホモロジー群 I

複体 F と λ をそれぞれ以下のように与える

$$F = \left(0 \longrightarrow C_1(S^1) \longrightarrow C_0(S^1) \longrightarrow 0\right),$$
$$\lambda = \left(0 \longrightarrow H_1(S^1) \longrightarrow H_0(S^1) \longrightarrow 0\right)$$
$$= \left(0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0\right).$$

S^1 の三角形分割 $\triangle ABC$ を考え，$C_1(S^1)$ の基底として $\triangle ABC$ の三辺，$C_0(S^1)$ の基底として $[B]-[A]$，$[C]-[B]$，$[A]$ をそれぞれ選ぶ．以下の

例:S^1 のホモロジー群 II

図式に対して

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "d_0^Z"] \arrow[d, dash] & \mathbb{Z} \oplus C_1(S^1) \arrow[r, "d_1^Z"] \arrow[d, dash] \arrow[ddl, "\Psi^1"'] & C_0(S^1) \arrow[r] \arrow[d, dash] \arrow[ddl, "\Psi^2"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "d_0^Z"'] & \mathbb{Z} \oplus C_1(S^1) \arrow[r, "d_1^Z"'] & C_0(S^1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

例:S^1 のホモロジー群 III

それぞれの射とホモトピーを

$$d_0^Z = {}^t(0,1,1,1), \quad d_1^Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi^1 = (0,0,0,-1), \quad \Psi^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例:S^1 のホモロジー群 IV

とすると，$\mathrm{Cone}(\alpha) \simeq 0$ となる．実際，

$$\Psi^1 \circ d_0^Z = -1,$$

$$\Psi^2 \circ d_1^Z + d_0^Z \circ \Psi^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$d_1^Z \circ \Psi^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- $\alpha : \lambda \to F$ に対して，$\mathrm{Cone}(\alpha) \otimes V \simeq 0 \Leftrightarrow \lambda :$ 固有値として解釈できた．

- 例としてある複体の圏論的固有値として (コ) ホモロジー群が得られた．

- 物理的な意味を持つ例を作っていきたい

- 例えば BRST コホモロジー？

- $\alpha : \lambda \to F$ に対して，$\mathrm{Cone}(\alpha) \otimes V \simeq 0 \Leftrightarrow \lambda :$ 固有値として解釈できた．
- 例としてある複体の圏論的固有値として (コ) ホモロジー群が得られた．
- 物理的な意味を持つ例を作っていきたい
- 例えば BRST コホモロジー？

- $\alpha : \lambda \to F$ に対して，$\mathrm{Cone}(\alpha) \otimes V \simeq 0 \Leftrightarrow \lambda :$ 固有値として解釈できた．
- 例としてある複体の圏論的固有値として (コ) ホモロジー群が得られた．
- 物理的な意味を持つ例を作っていきたい
- 例えば BRST コホモロジー？

- $\alpha : \lambda \to F$ に対して，$\mathrm{Cone}(\alpha) \otimes V \simeq 0 \Leftrightarrow \lambda :$ 固有値として解釈できた．
- 例としてある複体の圏論的固有値として (コ) ホモロジー群が得られた．
- 物理的な意味を持つ例を作っていきたい
- 例えば BRST コホモロジー？

References I

[1] A. Chandler, N. Karnick, D. Vagner : *Categorical diagonalization.* A chapter in the MSRI Proceedings: Soergel Bimodules.

[2] B. Elias. and M. Hogancamp : *Categorical diagonalization.* arXiv:1707.04349v1.

[3] B. Elias. and M. Hogancamp : *Categorical diagonalization of full twists* arXiv:1801.00191v1.

[4] J. Gohara, Y. Hirota, K. Ino and A. Sako: *Homology groups and categorcal diagonalization* arXiv:1909.02361

ご清聴ありがとうございました.