



テンソル繰り込み群を用いた 複素作用問題へのアプローチ

加堂 大輔

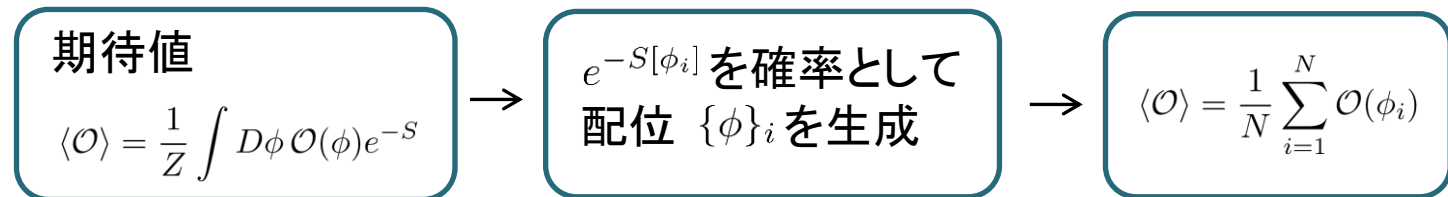
Chulalongkorn Univ.

離散的手法による場と時空の
ダイナミクス 2019 @ 島根大学

2019年9月10日

モンテカルロ法と負符号問題

- Monte Carlo 法



$e^{-S[\phi_i]}$: 負ではない実数

- (例) SYM QM

$$S = \frac{N}{2\lambda} \int dt \operatorname{tr} \left\{ (D_0 X_i)^2 - \frac{1}{2} [X_i, X_j]^2 + \psi D_0 \psi + \psi \gamma_i [X_i, \psi] \right\}$$

$$Z = \int DADX \underbrace{e^{-S_B} \operatorname{pf}(D)}$$

負になりうる

負符号問題

負符号問題のある場合

有限密度QCD

初期宇宙、中性子性,..

カイラルゲージ理論

標準模型, GUT,..

超対称理論

AdS/CFT, 超弦理論,...

θ -真空

strong CP問題

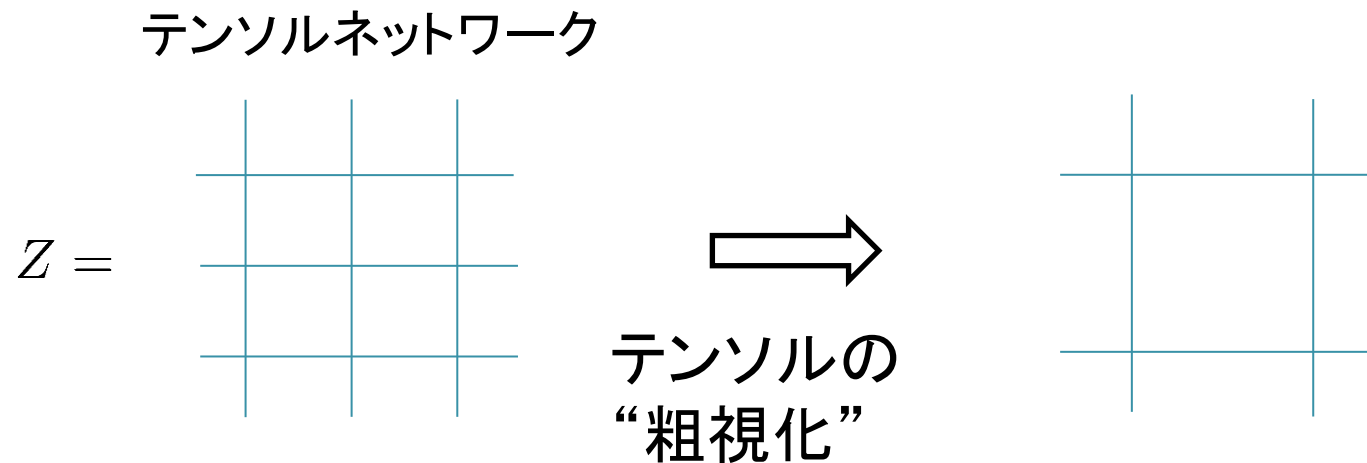
実時間シミュレーション

Schwinger-Keldysh形式

負符号問題の解決は非常に重要

テンソル繰り込み群

Levin-Nave, 2007



統計的な取り扱いなし！

そもそも負符号問題はない

c.f. モンテカルロ法に基づく手法:

Reweighting, 複素ランジェバン、レフシェッツシンブル, ...



2. テンソル繰り込み群

2次元イジング模型

- ハミルトニアン

$$H = -J \sum_n \{ \sigma_n \sigma_{n-\hat{1}} + \sigma_n \sigma_{n-\hat{2}} \} + h \sum_n \sigma_n$$

J, h : 結合定数、外場 $\sigma_n = \pm 1$

- 分配関数

$$Z = \text{Tr}(e^{-\beta H})$$

$$\equiv \prod_n \sum_{\sigma_n = \pm 1} e^{\beta J(\sigma_n \sigma_{n-\hat{1}} + \sigma_n \sigma_{n-\hat{2}}) + \beta h \sigma_n}$$

$$= \sum_{l, o, \dots} T_{ijkl} T_{lmno} T_{opqr} \cdots$$

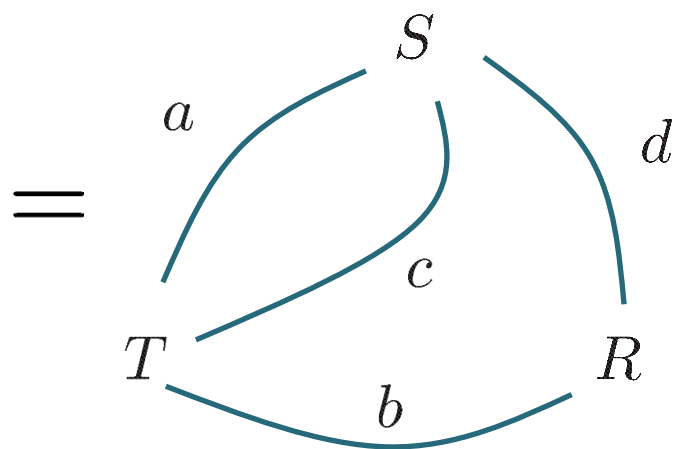
グラフを用いた表示

$$T_{ijkl} = k \begin{array}{c} j \\ | \\ \text{---} T \text{---} \\ | \\ l \\ i \end{array}$$

$$\sum_{k=1}^N T_{kabc} S_{ijk} = a \begin{array}{c} b \quad j \\ \diagdown \quad \diagup \\ T \quad \quad S \\ \diagup \quad \diagdown \\ c \quad k \quad i \end{array}$$

“テンソルの縮約”

$$Z = T_{bca} S_{acd} R_{bd}$$



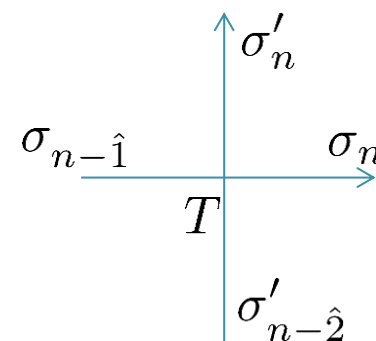
“テンソルネットワーク”

格子場の理論
→ 局所的で一様な
ネットワーク

テンソルネットワーク表示(2dイジング模型)

$$\begin{aligned}
 Z &= \prod_n \sum_{\sigma_n = \pm 1} e^{\beta J(\sigma_n \sigma_{n-\hat{1}} + \sigma_n \sigma_{n-\hat{2}}) + \beta h \sigma_n} \\
 &= \prod_n \sum_{\sigma_n = \pm 1} \sum_{\sigma'_n = \pm 1} \delta_{\sigma_n \sigma'_n} e^{\beta J(\sigma_n \sigma_{n-\hat{1}} + \sigma'_n \sigma'_{n-\hat{2}}) + \beta h \sigma_n} \\
 &\quad \quad \quad \parallel \\
 &\quad \quad \quad T_{\sigma_n \sigma'_n \sigma_{n-\hat{1}} \sigma'_{n-\hat{2}}} \\
 &= \prod_n \sum_{\sigma_n = \pm 1} \sum_{\sigma'_n = \pm 1} T_{\sigma_n \sigma'_n \sigma_{n-\hat{1}} \sigma'_{n-\hat{2}}}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|} \hline T & T & T \\ \hline T & T & T \\ \hline T & T & T \\ \hline \end{array}$$



$$T_{abcd} = \delta_{ab} e^{\beta J(ac+bd) + \beta ha}$$

特異値分解 (singular value decomposition)

- 行列のSVD

$$T_{IJ} = \sum_{m=1}^N U_{Im} \sigma_m V_{mJ}$$

$$= \sum_{m=1}^N S_{Im} S'_{mJ}$$

特異値

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_N \geq 0$$

$$S_{Im} = \sqrt{\sigma_m} U_{Im} \quad S'_{mJ} = \sqrt{\sigma_m} V_{mJ}$$

$$I \xrightarrow{T} J = I \xrightarrow[S \quad m \quad S']{} J$$

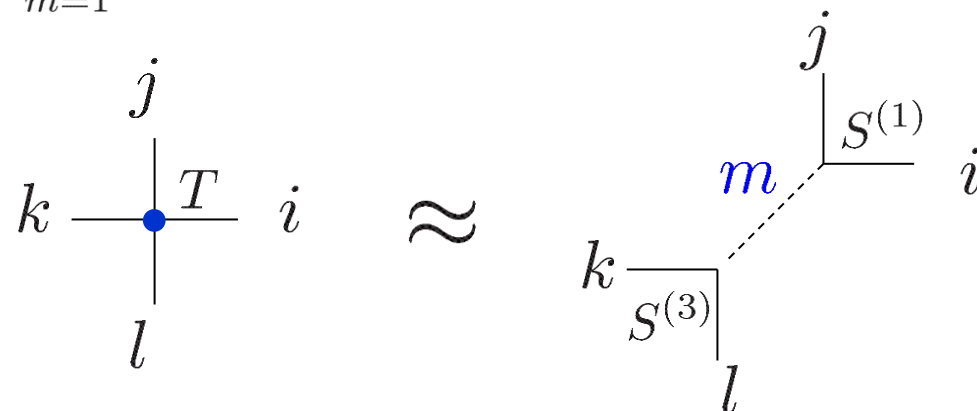
- 行列の低ランク近似

$$T_{IJ} \approx \sum_{m=1}^{D_{\text{cut}}} S_{Im} S'_{mJ}$$

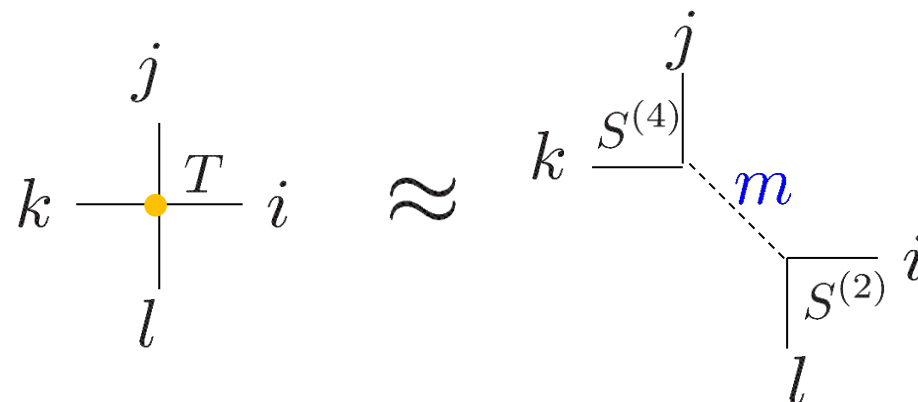
$$D_{\text{cut}} < N$$

テンソルの特異値分解

- $T_{ijkl} \approx \sum_{m=1}^{D_{cut}} S_{ijm}^{(1)} S_{klm}^{(3)}$ (偶数サイト ●)

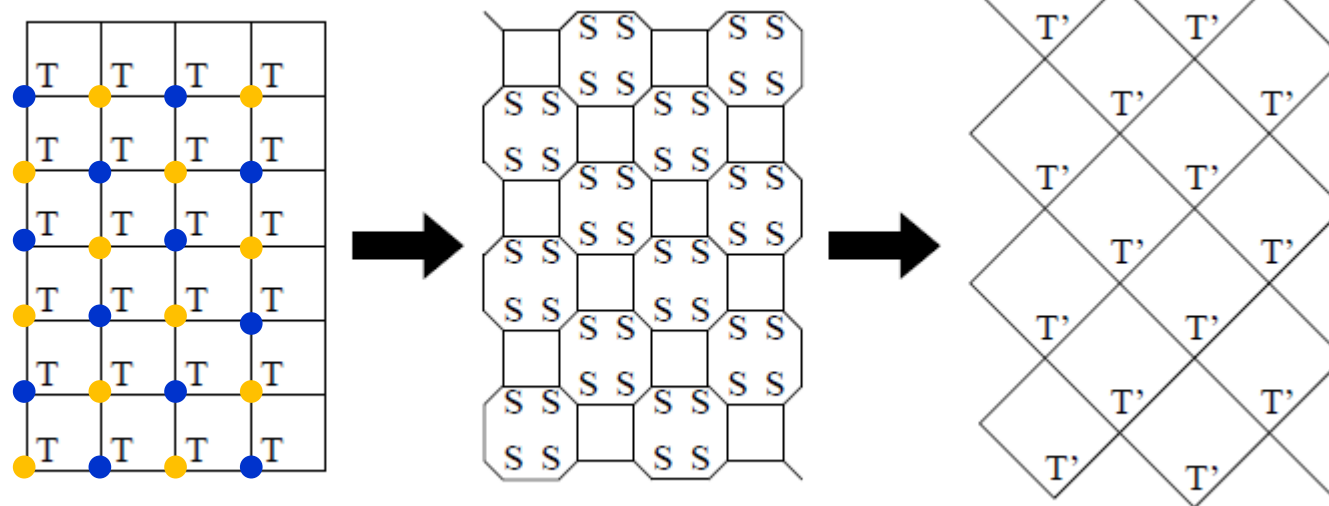


- $T_{ijkl} \approx \sum_{m=1}^{D_{cut}} S_{lim}^{(2)} S_{jkm}^{(4)}$ (奇数サイト ●)



テンソル繰り込み群(TRG)

Levin-Nave, 2007



$$Z = \sum_{i,j,\dots} T_{ijkl} T_{lmno} \cdots \approx \sum_{i,j,\dots} S^{(1)} S^{(2)} S^{(3)} S^{(4)} \cdots = \sum_{m,n,\dots} T'_{mnpq} T'_{mkr s} \cdots$$

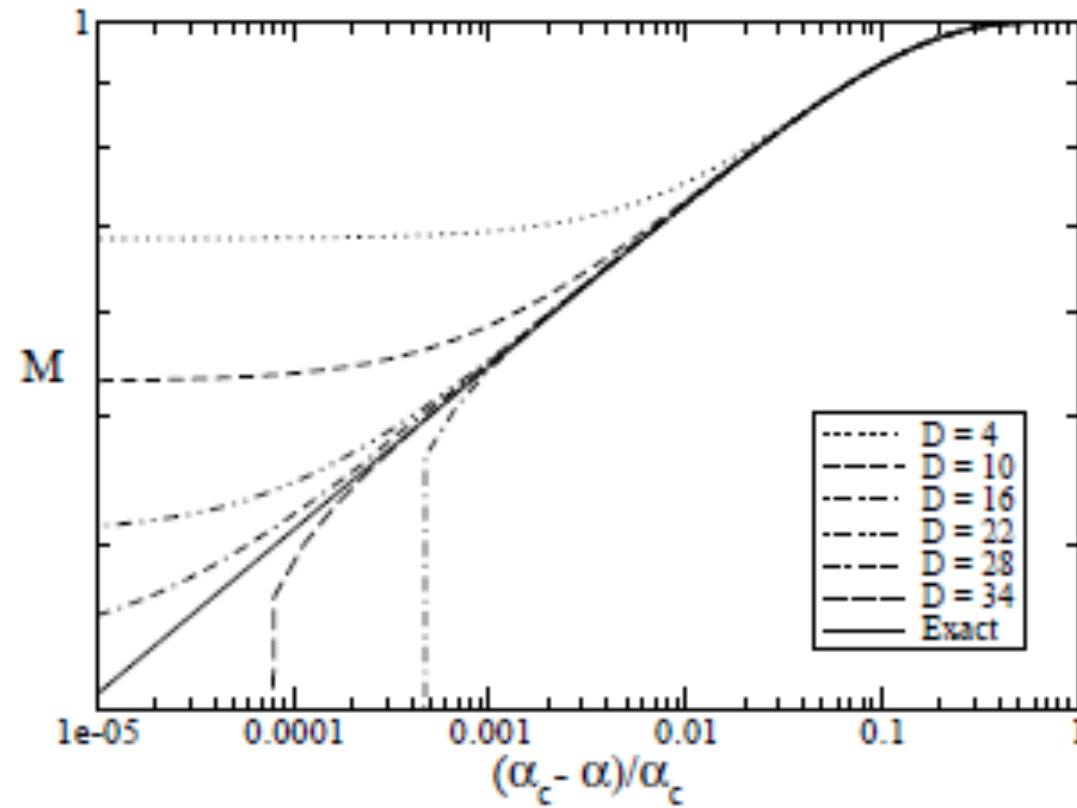
$$Z \approx \sum_{i,j=1}^{D_{\text{cut}}} \tilde{T}_{ijij}$$

$$T'_{ijkl} = \sum_{abcd} S_{abi}^{(1)} S_{bcj}^{(2)} S_{cdk}^{(3)} S_{dal}^{(4)}$$

$$\# \text{ of } T' = \frac{\# \text{ of } T}{2}$$

磁化の計算結果

Levin-Nave, 2007



$$\alpha = e^{-2\beta J}$$

テンソル繰り込み群の性質

- (1) 負符号問題なし、統計誤差なし
- (2) 有限Dcut由来の系統的な誤差
- (3) 分配関数(自由エネルギー)が直接計算可能
- (4) 計算コストは $\log(V) \times D_{cut}^p$

$$p = 5 \quad \text{for } d = 2 \quad (\text{TRG}, 2007)$$

$$p = 4d - 1 \quad (\text{HOTRG}, 2012)$$

$$p = 2d + 1 \quad (\text{ATRG}, 2019)$$

場の理論でのテンソルネットワーク

(1) スカラー場

$$T_{\sigma_n \sigma'_n \sigma_{n-1} \sigma'_{n-2}} \quad \Rightarrow \quad T_{\phi_n \phi'_n \phi_{n-1} \phi'_{n-2}}$$
$$\sigma_n = \pm 1 \qquad \qquad \phi_n \in \mathbf{R}$$

無限次元テンソル

(2) フェルミオン場

グラスマン-TRG (Gu et al, 2010)で扱えるが、
非常に複雑



3. $N=2$ 超対称量子力学 & 実スカラー理論

N=2 超対称量子力学

- 作用

$$S_{cont} = \int_0^\beta dt \left\{ \frac{1}{2} (\partial_t \phi(t))^2 + \frac{1}{2} W(\phi(t))^2 + \bar{\psi}(t) (\partial_t + W'(\phi(t))) \psi(t) \right\}$$

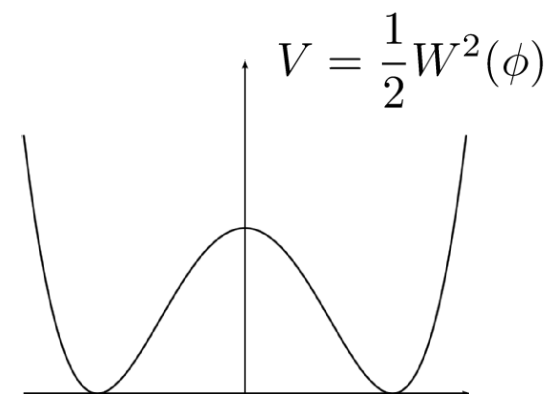
$$Z = \int D\phi D\psi D\bar{\psi} e^{-S_{cont}}$$

$\phi(t)$ スカラー場 $\psi(t), \bar{\psi}(t)$ フェルミオン場

- 超対称性の破れ

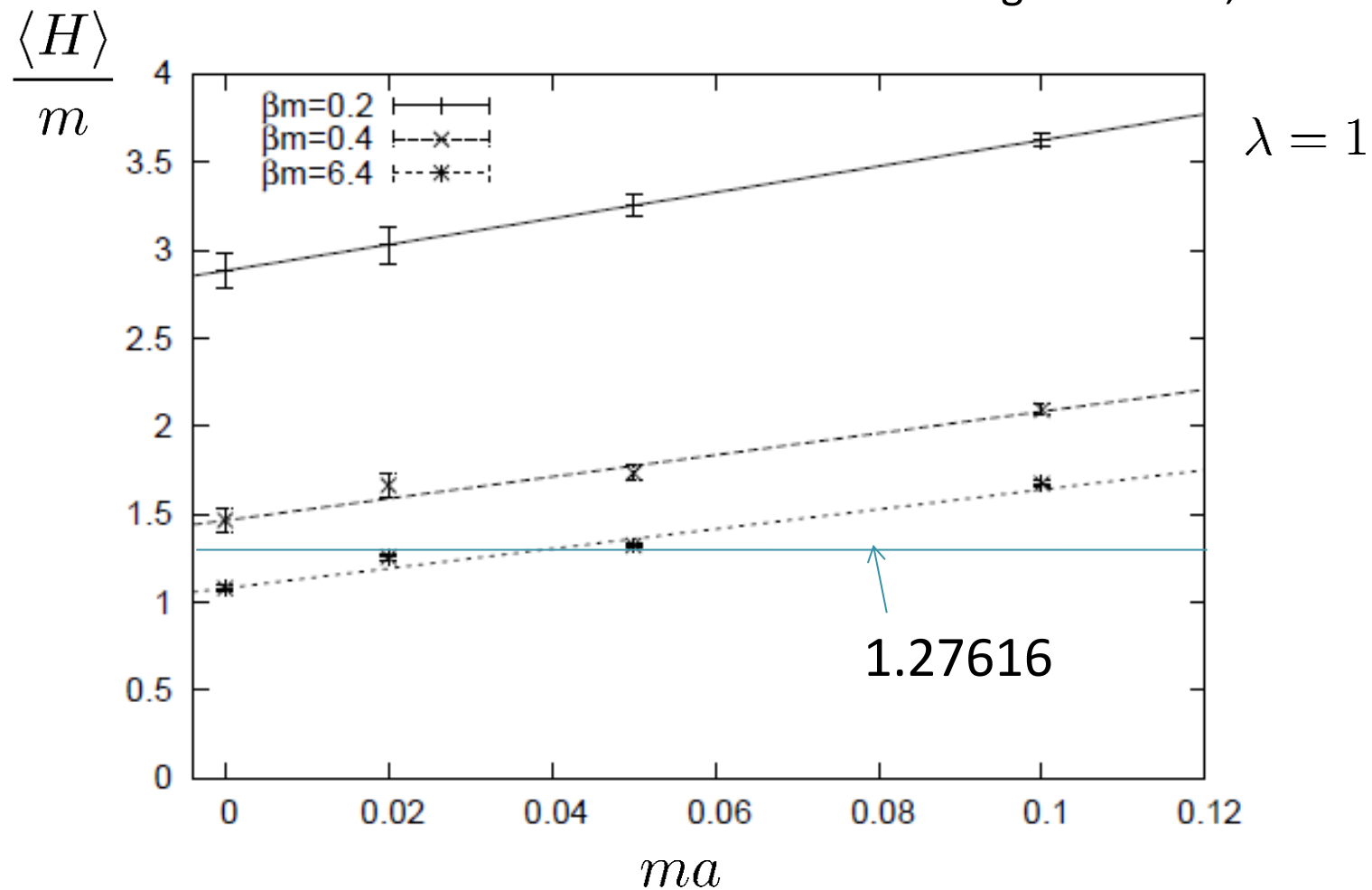
$$W(\phi) = m\phi + m^{3/2}\lambda\phi^2$$

$$\frac{\langle H \rangle}{m} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{3\lambda^2}} \quad \text{インスタントン効果}$$



モンテカルロ法による結果

Kanamori-Sugino-Suzuki, 2008



分配関数の転送行列表示

- 格子作用

$$S_{lat} = \sum_{t=1}^N \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \phi_t + W(\phi_t))^2 + \bar{\psi}_t (\nabla + W'(\phi_t)) \psi_t \right\}$$

$$Z = \int D\phi e^{-S_B} \det(\nabla + W')$$

∇ : 後方差分

$$\det(\nabla + W') = -1 + \prod_{t=1}^N (1 + W'(\phi_t))$$

- 転送行列

$$Z = \int d\phi_1 d\phi_2 \cdots d\phi_N \left\{ \prod_{t=1}^N S_{\phi_t \phi_{t-1}} - \prod_{t=1}^N T_{\phi_t \phi_{t-1}} \right\}$$

$$= \text{Tr}(S^N) - \text{Tr}(T^N)$$

$$T_{\phi\phi'} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\phi - \phi' + W(\phi))^2}$$

$$\text{Tr}(A) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\phi A_{\phi\phi}$$

$$S_{\phi\phi'} = (1 + W'(\phi)) T_{\phi\phi'}$$

$$(AB)_{xy} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dz A_{xz} B_{zy}$$

転送行列を使った直接計算法

● ガウス求積法

D.K. and Nakayama, arXiv:1803.07960

(例) ガウス-エルミート求積

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\phi F(\phi) \approx \sum_{\phi \in S_K} g_K(\phi) F(\phi)$$

$S_K = H_K(\phi)$ のゼロ点

$$g_K(\phi) = \frac{2^{K-1} K! \sqrt{\pi}}{K^2 H_{K-1}^2(\phi)} e^{\phi^2}$$

経路積分測度

$$\int d\phi_1 d\phi_2 \cdots d\phi_N \approx \sum_{\phi_1 \in S_K} \sum_{\phi_2 \in S_K} \cdots \sum_{\phi_N \in S_K} g_K(\phi_1) g_K(\phi_2) \cdots g_K(\phi_N)$$

● 有限次元の転送行列 (K x Kの行列)

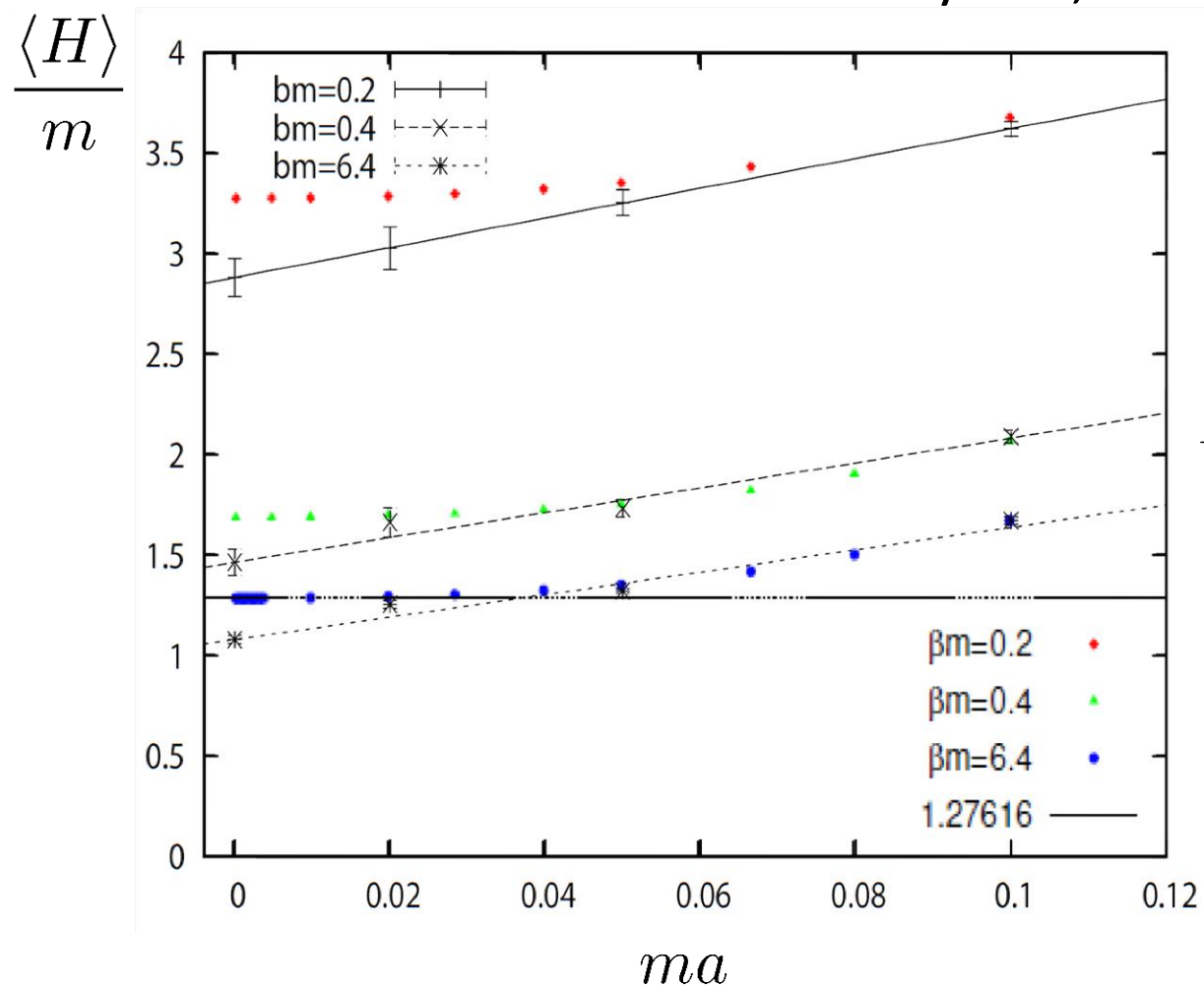
$$T_{\phi\phi'} = \sqrt{\frac{g_K(\phi)g_K(\phi')}{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\phi - \phi' + W(\phi))^2 \right\}$$

$$S_{\phi\phi'} = (1 + W'(\phi)) T_{\phi\phi'}$$

$$Z \approx \text{tr}(S^N) - \text{tr}(T^N) \quad \text{を直接計算可能}$$

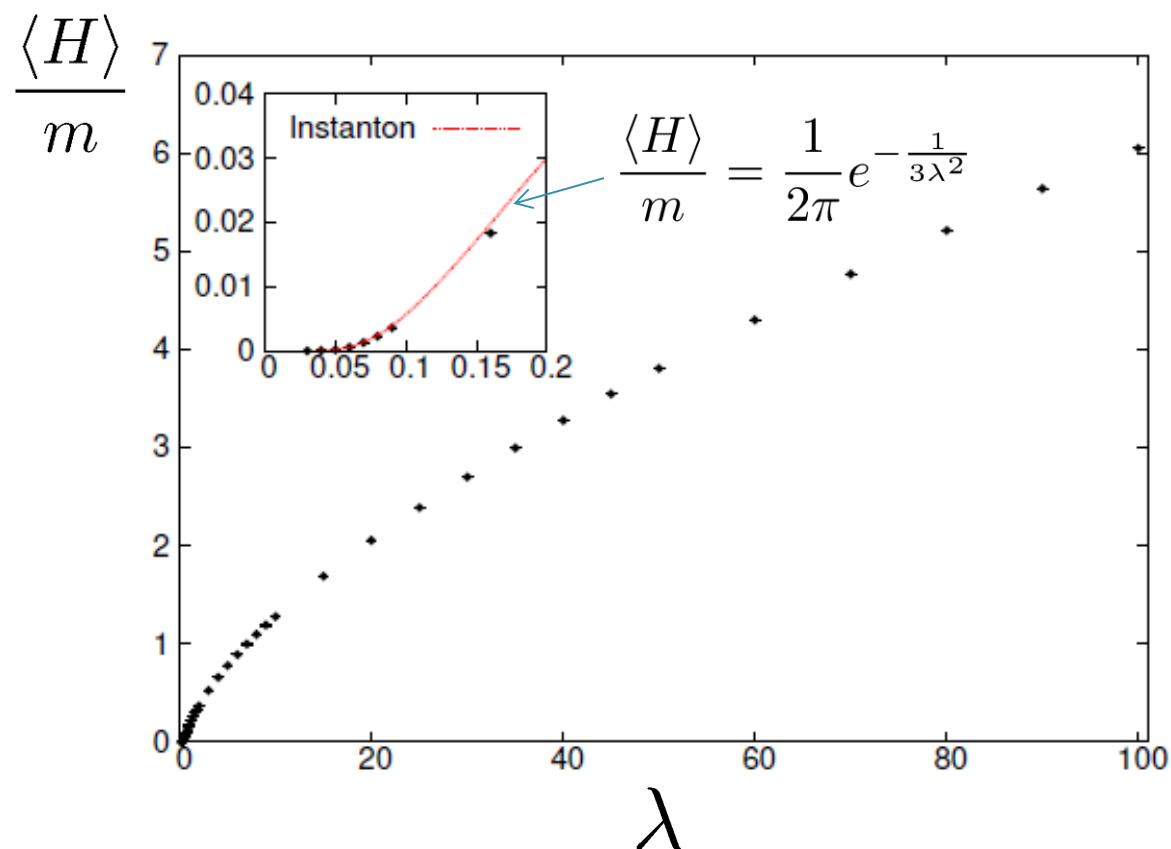
真空エネルギー

D.K. and Nakayama, arXiv:1812.10642



$K = 150 \sim 200$

真空エネルギーの λ 依存性



強結合から弱結合まで計算は正しく機能

2次元の実スカラー ϕ^4 理論

- 格子作用

$$S_{lat} = \sum_n \left\{ \frac{1}{2} (\nabla_\mu \phi_n)^2 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \phi_n^2 + \frac{\lambda_0}{4} \phi_n^4 \right\}$$

連続極限 $\lambda_0 = \lambda a^2 \rightarrow 0$

Z_2 $\phi \rightarrow -\phi$

- Z_2 -対称性の破れ

$$\langle \phi \rangle = 0 \quad \text{for } f < f_c$$

$$\langle \phi \rangle \neq 0 \quad \text{for } f > f_c \quad f = \lambda/\mu^2$$

TN表示 (2次元格子スカラー理論)

$$Z = \prod_n \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_n e^{-S_{lat}}$$

$$Z \approx \prod_n \sum_{\phi_n \in S_K} g_K(\phi_n) e^{-\sum_n \left\{ \frac{1}{2}(\phi_n - \phi_{n-\hat{1}})^2 + \frac{1}{2}(\phi_n - \phi_{n-\hat{2}})^2 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \phi_n^2 + \frac{\lambda_0}{4} \phi_n^4 \right\}}$$

$$\begin{aligned} &= \prod_n \sum_{\phi_n \in S_K} \sum_{\phi'_n \in S_K} g_K(\phi_n) \\ &\quad \times \delta_{\phi_n \phi'_n} e^{-\sum_n \left\{ \frac{1}{2}(\phi_n - \phi_{n-\hat{1}})^2 + \frac{1}{2}(\phi'_n - \phi'_{n-\hat{2}})^2 + \frac{1}{4}\mu_0^2(\phi_n^2 + \phi'^2_n) + \frac{\lambda_0}{8}(\phi_n^4 + \phi'^4_n) \right\}} \end{aligned}$$

$$\parallel$$

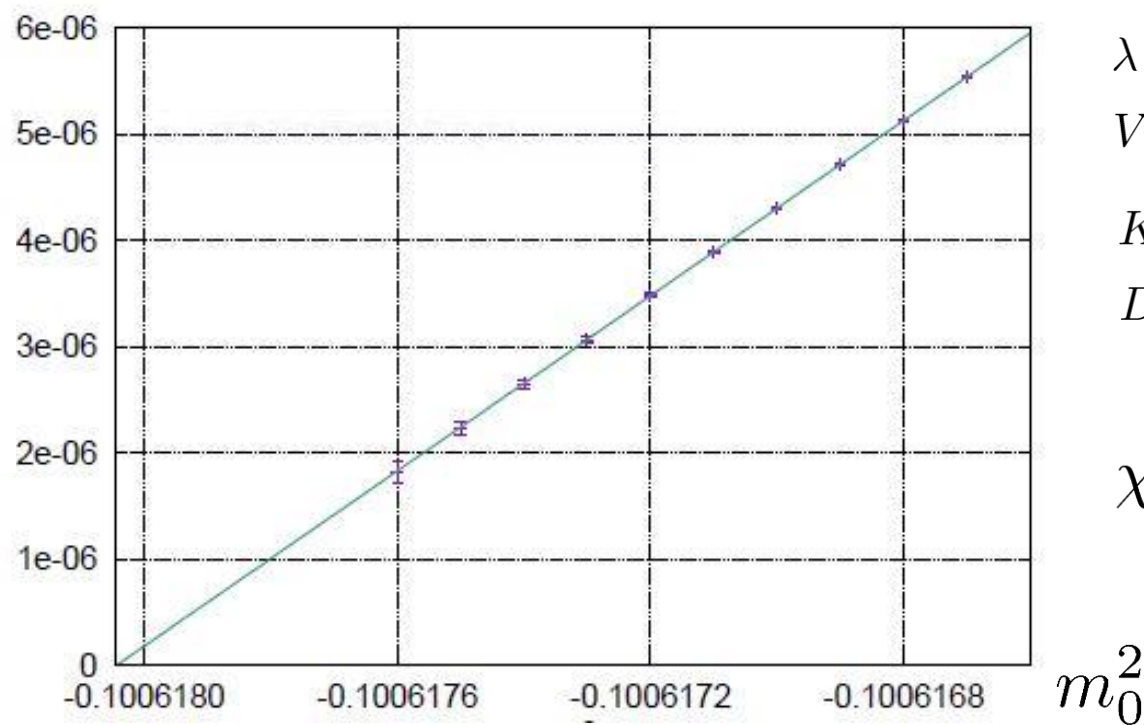
$$T_{\phi_n \phi'_n \phi_{n-\hat{1}} \phi'_{n-\hat{2}}}$$

$$= \prod_n \sum_{\phi_n \in S_K} \sum_{\phi'_n \in S_K} T_{\phi_n \phi'_n \phi_{n-\hat{1}} \phi'_{n-\hat{2}}}$$

感受率

D.K., Kuramashi, Nakamura, Sakai,
Takeda, Yoshimura, JHEP 1905 (2019) 184

$$\chi^{-\frac{1}{1.75}}$$



$$\lambda = 0.05$$

$$V = 2^{20} \times 2^{20}$$

$$K = 256$$

$$D_{cut} = 32$$

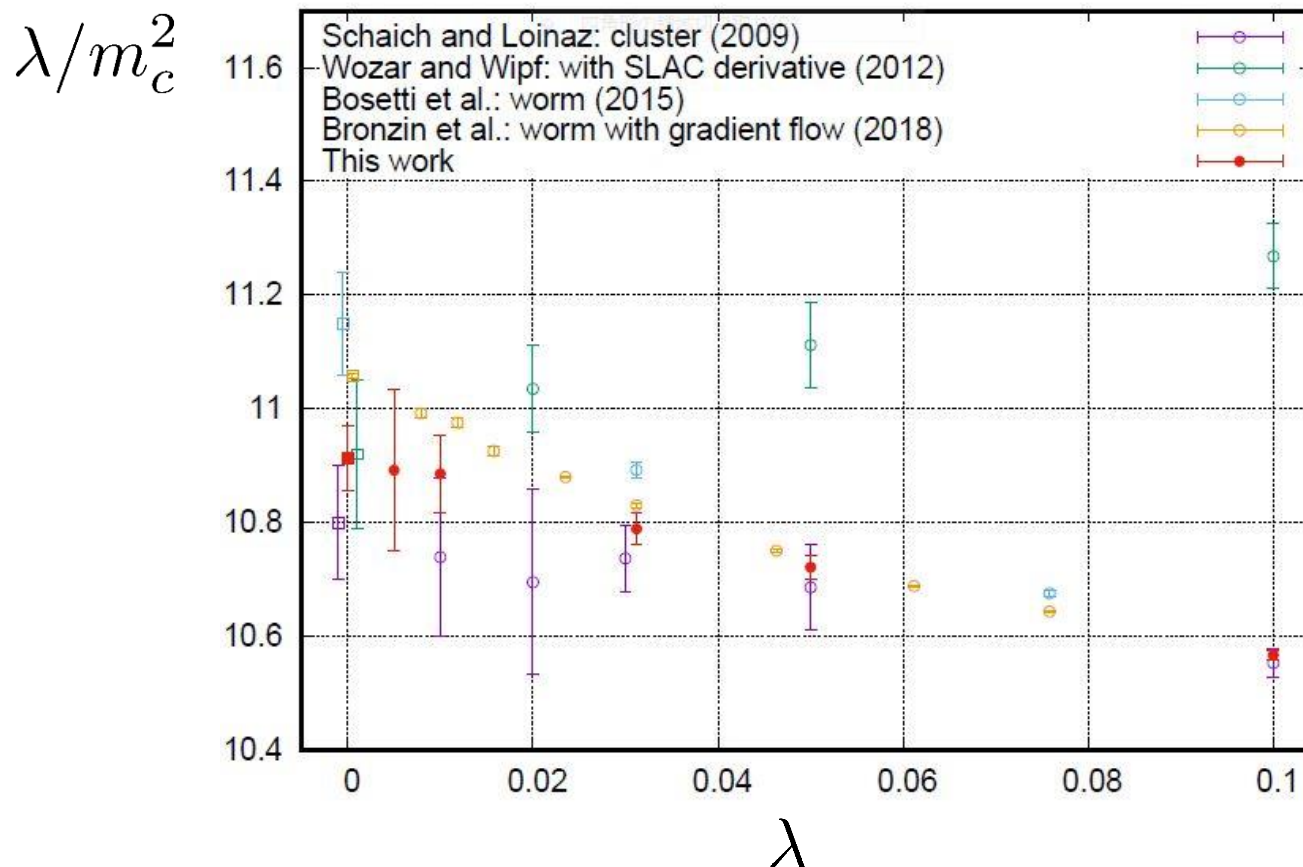
$$\chi = \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial h}$$

$$\chi \propto |m_0 - m_{0c}|^{-\gamma} \quad \gamma = 1.75$$

臨界指数

臨界結合定数

D.K., Kuramashi, Nakamura, Sakai,
Takeda, Yoshimura, JHEP 1905 (2019) 184



何の改良もないTRGでD=64までの計算でも良い精度
ナイーブな求積法で十分機能