トークのプラン

1. 研究動機
2. テンソル繰り込み群(TRG)
3. N=2超対称量子力学 & 実スカラー理論
4. 有限密度の複素スカラー理論
5. フェルミオン系でのTRG
6. まとめ

テンソル繰り込み群を用いた複素作用問題へのアプローチ

加堂 大輔
Chulalongkorn Univ.

離散的手法による場と時空のダイナミクス 2019 @ 島根大学

2019年9月10日

モンテカルロ法と負符号問題

- Monte Carlo 法

期待値
$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int D\phi\, \mathcal{O}(\phi) e^{-S}$$

→

$e^{-S[\phi_i]}$ を確率として配位 $\{\phi\}_i$ を生成

→

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathcal{O}(\phi_i)$$

$e^{-S[\phi_i]}$: 負ではない実数

- (例) SYM QM

$$S = \frac{N}{2\lambda} \int dt \ \mathrm{tr} \left\{ (D_0 X_i)^2 - \frac{1}{2}[X_i, X_j]^2 + \psi D_0 \psi + \psi \gamma_i [X_i, \psi] \right\}$$

$$Z = \int DADX \, \underbrace{e^{-S_B} \mathrm{pf}(D)}_{\text{負になりうる}}$$

負符号問題

負符号問題のある場合

有限密度QCD

初期宇宙、中性子性,..

カイラルゲージ理論

標準模型, GUT,..

超対称理論

AdS/CFT, 超弦理論,...

θ -真空

strong CP問題

実時間シミュレーション

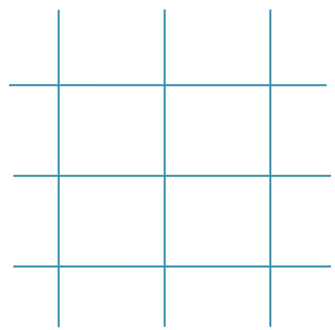
Schwinger-Keldysh形式

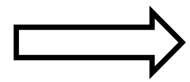
負符号問題の解決は非常に重要

テンソル繰り込み群

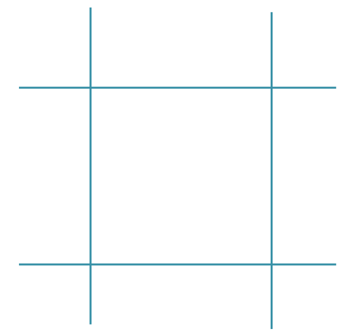
Levin-Nave, 2007

テンソルネットワーク

$Z =$ 



テンソルの
“粗視化”



統計的な取り扱いなし！

そもそも負符号問題はない

c.f. モンテカルロ法の基づく手法:
Reweighting, 複素ランジェバン、レフシェッツシンブル, …

2. テンソル繰り込み群

2次元イジング模型

- ハミルトニアン

$$H = -J\sum_n \{\sigma_n \sigma_{n-\hat{1}} + \sigma_n \sigma_{n-\hat{2}}\} + h\sum_n \sigma_n$$

J, h ： 結合定数、外場 $\sigma_n = \pm 1$

- 分配関数

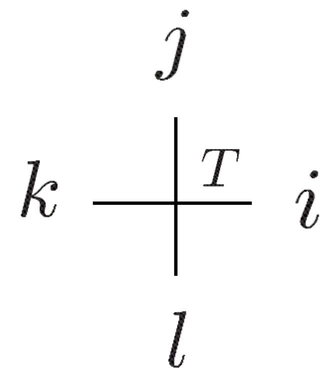
$$Z = \mathrm{Tr}(e^{-\beta H})$$

$$\equiv \prod_n \sum_{\sigma_n = \pm 1} e^{\beta J(\sigma_n \sigma_{n-\hat{1}} + \sigma_n \sigma_{n-\hat{2}}) + \beta h \sigma_n}$$

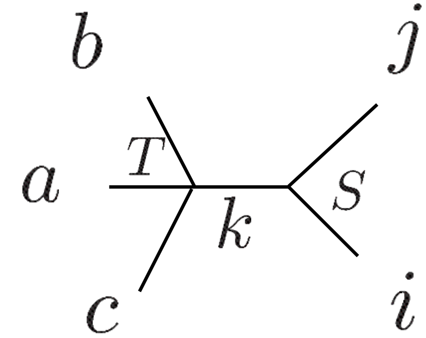
$$= \sum_{l,o,\ldots} T_{ijkl} T_{lmno} T_{opqr} \cdots$$

グラフを用いた表示

$T_{ijkl} =$



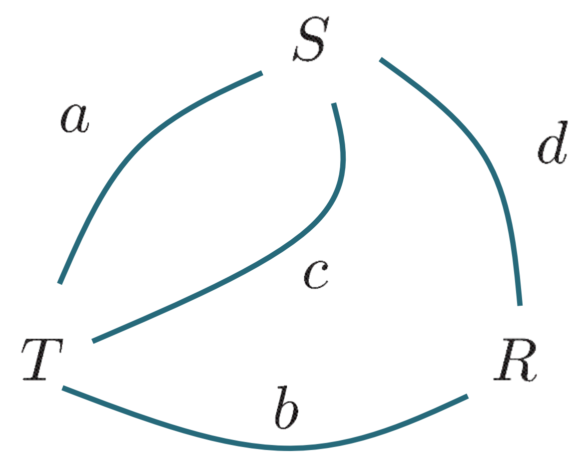
$\sum_{k=1}^{N} T_{kabc}S_{ijk} =$



“テンソルの縮約”

$Z = T_{bca}S_{acd}R_{bd}$

$=$



“テンソルネットワーク”

格子場の理論
→ 局所的で一様な
ネットワーク

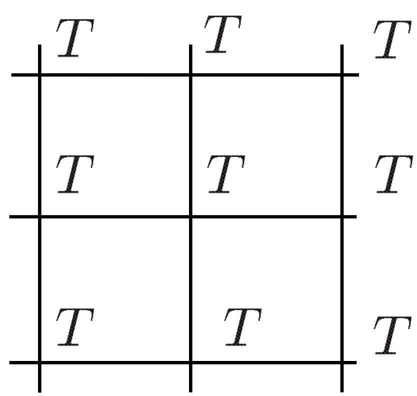
テンソルネットワーク表示（2dイジング模型）

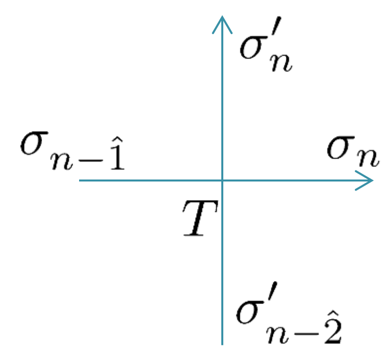
$$Z = \prod_n \sum_{\sigma_n=\pm 1} e^{\beta J(\sigma_n \sigma_{n-\hat{1}} + \sigma_n \sigma_{n-\hat{2}}) + \beta h \sigma_n}$$

$$= \prod_n \sum_{\sigma_n=\pm 1} \sum_{\sigma'_n=\pm 1} \delta_{\sigma_n \sigma'_n} e^{\beta J(\sigma_n \sigma_{n-\hat{1}} + \sigma'_n \sigma'_{n-\hat{2}}) + \beta h \sigma_n}$$

$$\delta_{\sigma_n \sigma'_n} e^{\beta J(\sigma_n \sigma_{n-\hat{1}} + \sigma'_n \sigma'_{n-\hat{2}}) + \beta h \sigma_n} = T_{\sigma_n \sigma'_n \sigma_{n-\hat{1}} \sigma'_{n-\hat{2}}}$$

$$= \prod_n \sum_{\sigma_n=\pm 1} \sum_{\sigma'_n=\pm 1} T_{\sigma_n \sigma'_n \sigma_{n-\hat{1}} \sigma'_{n-\hat{2}}}$$

$=$ 



$$T_{abcd} = \delta_{ab} e^{\beta J(ac+bd) + \beta h a}$$

特異値分解 (singular value decomposition)

- 行列のSVD

特異値

$$T_{IJ} = \sum_{m=1}^{N} U_{Im}\sigma_m V_{mJ} \qquad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_N \geq 0$$

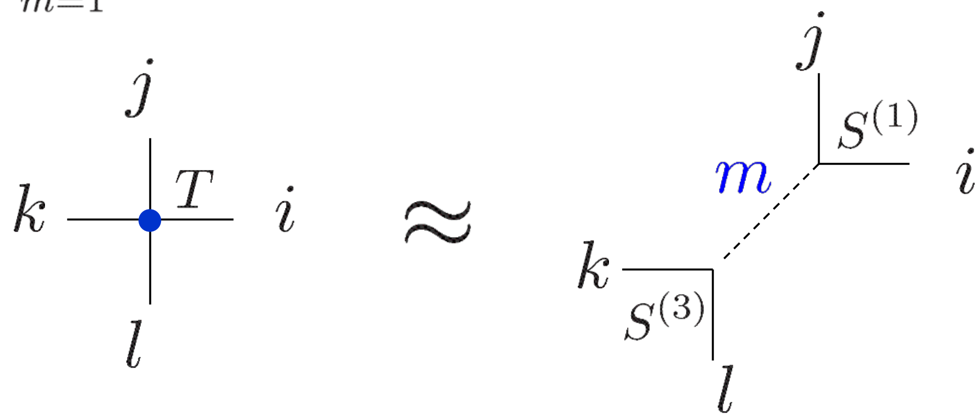
$$= \sum_{m=1}^{N} S_{Im} S'_{mJ} \qquad S_{Im} = \sqrt{\sigma_m} U_{Im} \quad S'_{mJ} = \sqrt{\sigma_m} V_{mJ}$$

- 行列の低ランク近似

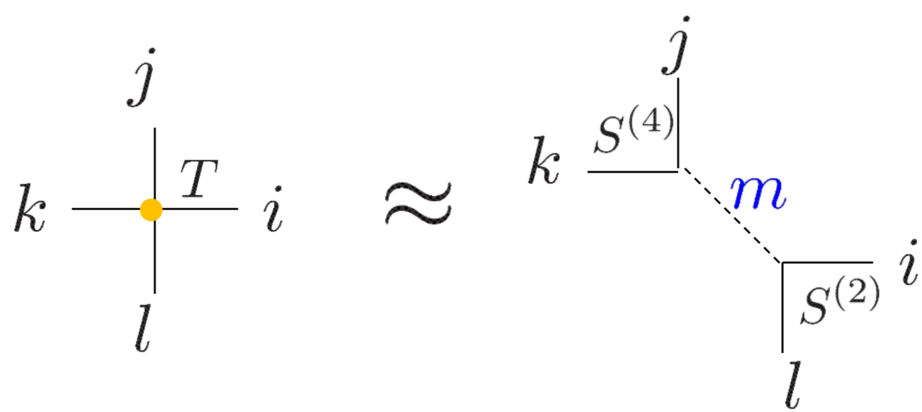
$$T_{IJ} \approx \sum_{m=1}^{D_{\mathrm{cut}}} S_{Im} S'_{mJ} \qquad D_{cut} < N$$

テンソルの特異値分解

- $T_{ijkl} \approx \sum_{m=1}^{D_{cut}} S^{(1)}_{ijm} S^{(3)}_{klm}$ （偶数サイト●）

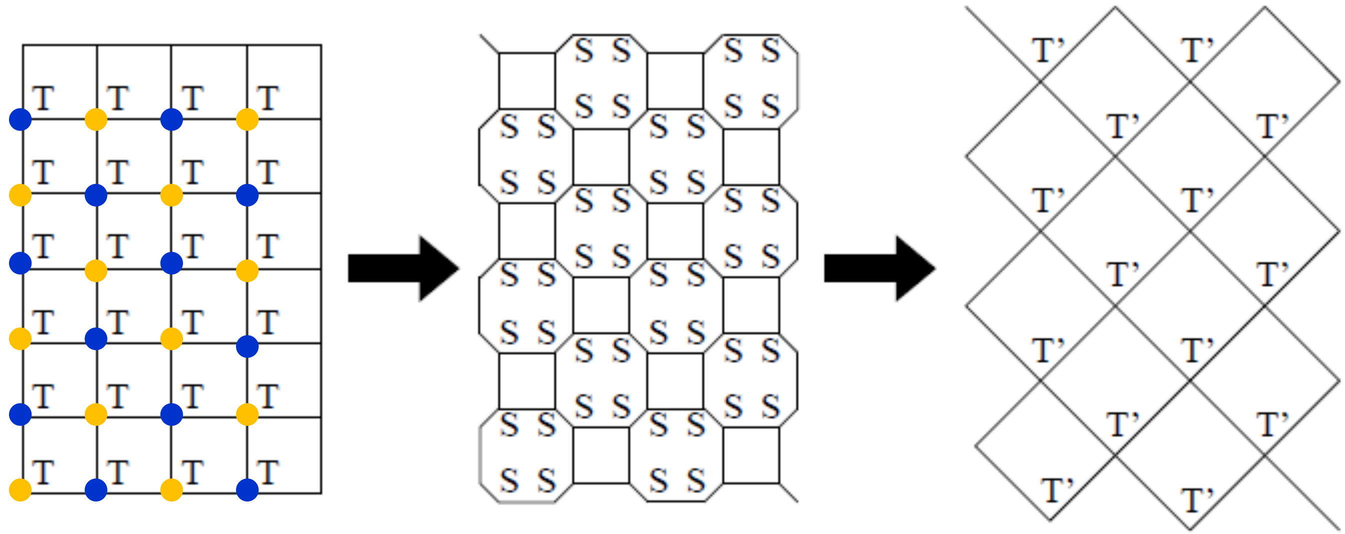


- $T_{ijkl} \approx \sum_{m=1}^{D_{cut}} S^{(2)}_{lim} S^{(4)}_{jkm}$ （奇数サイト●）



テンソル繰り込み群(TRG)

Levin-Nave, 2007



$$Z = \sum_{i,j,\ldots} T_{ijkl} T_{lmno} \cdots \approx \sum_{i,j,\cdots} S^{(1)} S^{(2)} S^{(3)} S^{(4)} \cdots = \sum_{m,n,\ldots} T'_{mnpq} T'_{mkrs} \cdots$$

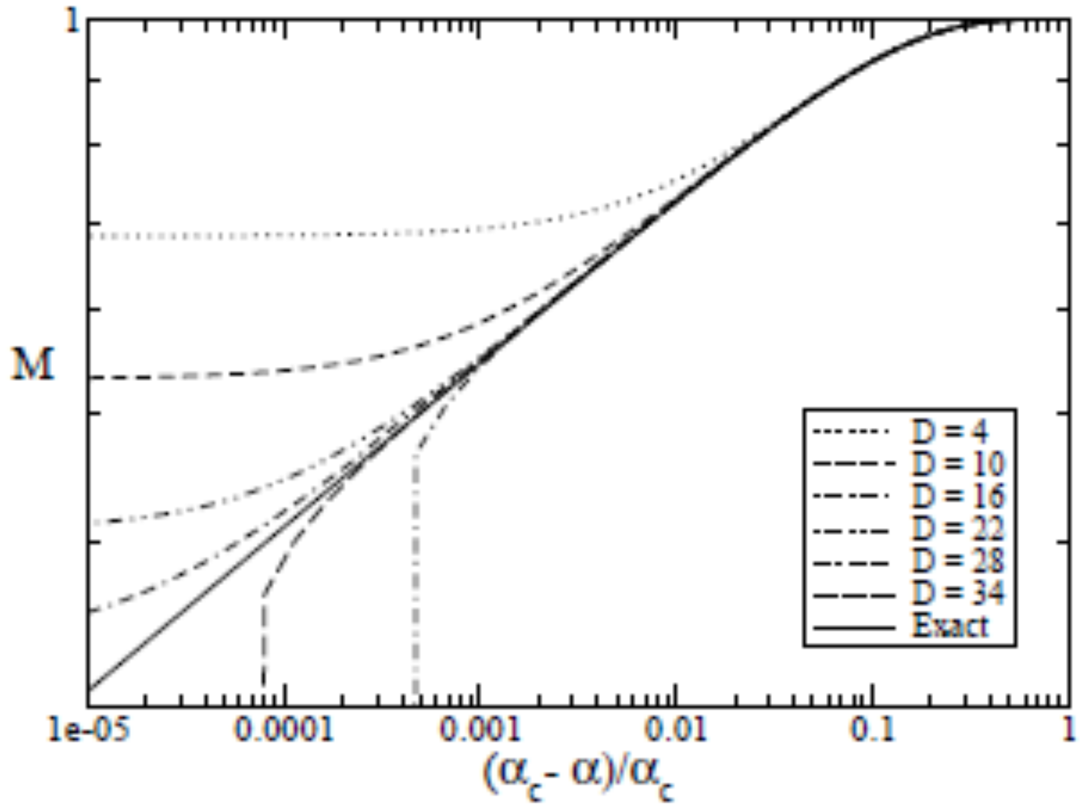
$$T'_{ijkl} = \sum_{abcd} S^{(1)}_{abi} S^{(2)}_{bcj} S^{(3)}_{cdk} S^{(4)}_{dal}$$

$$Z \approx \sum_{i,j=1}^{D_{\mathrm{cut}}} \tilde{T}_{ijij}$$

$$\#\text{ of } T' = \frac{\#\text{ of } T}{2}$$

磁化の計算結果

Levin-Nave, 2007



$$\alpha = e^{-2\beta J}$$

テンソル繰り込み群の性質

(1) 負符号問題なし、統計誤差なし

(2) 有限Dcut由来の系統的な誤差

(3) 分配関数(自由エネルギー)が直接計算可能

(4) 計算コストは $\log(V) \times D_{cut}^{p}$

$p = 5 \;\; \text{for } d = 2$ (TRG,2007)

$p = 4d - 1$ (HOTRG,2012)

$p = 2d + 1$ (ATRG,2019)

場の理論でのテンソルネットワーク

(1) スカラー場

$$T_{\sigma_n \sigma'_n \sigma_{n-\hat{1}} \sigma'_{n-\hat{2}}} \quad \Rightarrow \quad T_{\phi_n \phi'_n \phi_{n-\hat{1}} \phi'_{n-\hat{2}}}$$

$$\sigma_n = \pm 1 \qquad\qquad \phi_n \in \mathbf{R}$$

無限次元テンソル

(2) フェルミオン場

グラスマン-TRG (Gu et al, 2010)で扱えるが、
非常に複雑

3. N=2超対称量子力学 & 実スカラー理論

N=2 超対称量子力学

- 作用

$$S_{cont} = \int_0^\beta \mathrm{d}t \left\{ \frac{1}{2}(\partial_t \phi(t))^2 + \frac{1}{2} W(\phi(t))^2 + \overline{\psi}(t)\big(\partial_t + W'(\phi(t))\big)\psi(t) \right\}$$

$$Z = \int D\phi D\psi D\bar{\psi}\, e^{-S_{cont}}$$

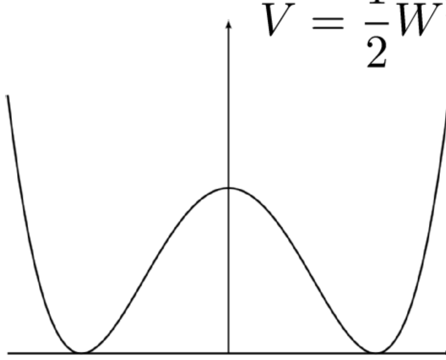
$\phi(t)$ スカラー場　　$\psi(t), \bar{\psi}(t)$ フェルミオン場

- 超対称性の破れ

$$W(\phi) = m\phi + m^{3/2}\lambda\phi^2$$

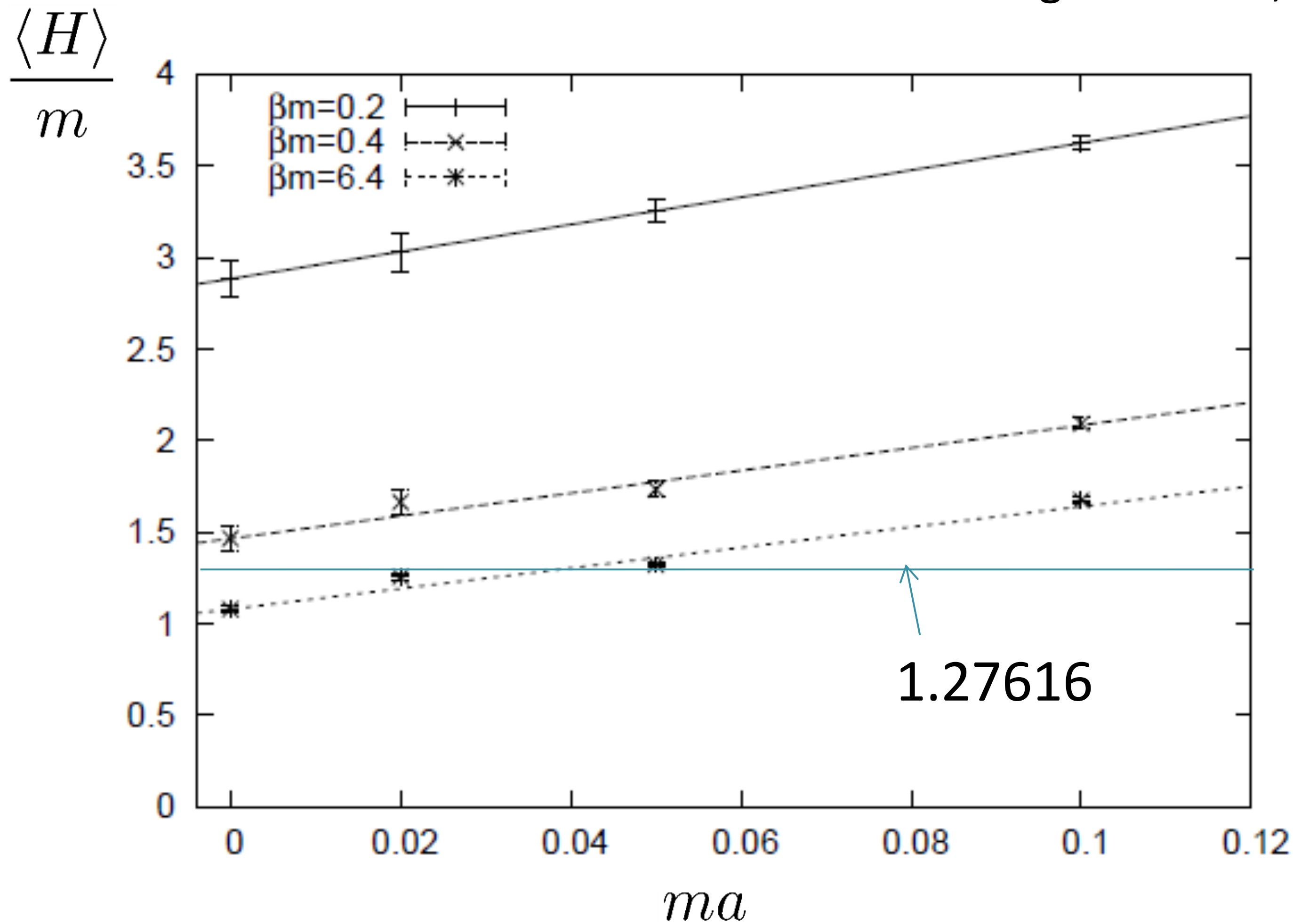
$$\frac{\langle H \rangle}{m} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{3\lambda^2}}$$ インスタントン効果

$$V = \frac{1}{2}W^2(\phi)$$



モンテカルロ法による結果

Kanamori-Sugino-Suzuki, 2008



$\lambda = 1$

分配関数の転送行列表示

- 格子作用

$$S_{lat}=\sum_{t=1}^{N}\left\{\frac{1}{2}(\nabla\phi_t+W(\phi_t))^2+\bar{\psi}_t(\nabla+W'(\phi_t))\psi_t\right\}$$

$$Z=\int D\phi e^{-S_B}\det(\nabla+W')$$

∇ ：後方差分

$$\det(\nabla+W')=-1+\prod_{t=1}^{N}(1+W'(\phi_t))$$

- 転送行列

$$Z=\int d\phi_1 d\phi_2\cdots\phi_N\left\{\prod_{t=1}^{N}S_{\phi_t\phi_{t-1}}-\prod_{t=1}^{N}T_{\phi_t\phi_{t-1}}\right\}$$

$$=\mathrm{Tr}(S^N)-\mathrm{Tr}(T^N)$$

$$T_{\phi\phi'}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\phi-\phi'+W(\phi))^2}$$

$$S_{\phi\phi'}=(1+W'(\phi))T_{\phi\phi'}$$

$$\mathrm{Tr}(A)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}d\phi A_{\phi\phi}$$

$$(AB)_{xy}\equiv\int_{-\infty}^{\infty}dz A_{xz}B_{zy}$$

転送行列を使った直接計算法

D.K. and Nakayama, arXiv:1803.07960

- ガウス求積法

(例) ガウス-エルミート求積

S_K = $H_K(\phi)$ のゼロ点

$$g_K(\phi) = \frac{2^{K-1}K!\sqrt{\pi}}{K^2 H_{K-1}^2(\phi)} e^{\phi^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\phi F(\phi) \approx \sum_{\phi \in S_K} g_K(\phi) F(\phi)$$

経路積分測度

$$\int d\phi_1 d\phi_2 \cdots \phi_N \approx \sum_{\phi_1 \in S_K} \sum_{\phi_2 \in S_K} \cdots \sum_{\phi_N \in S_K} g_K(\phi_1) g_K(\phi_2) \cdots g_K(\phi_N)$$

- 有限次元の転送行列（K x Kの行列）

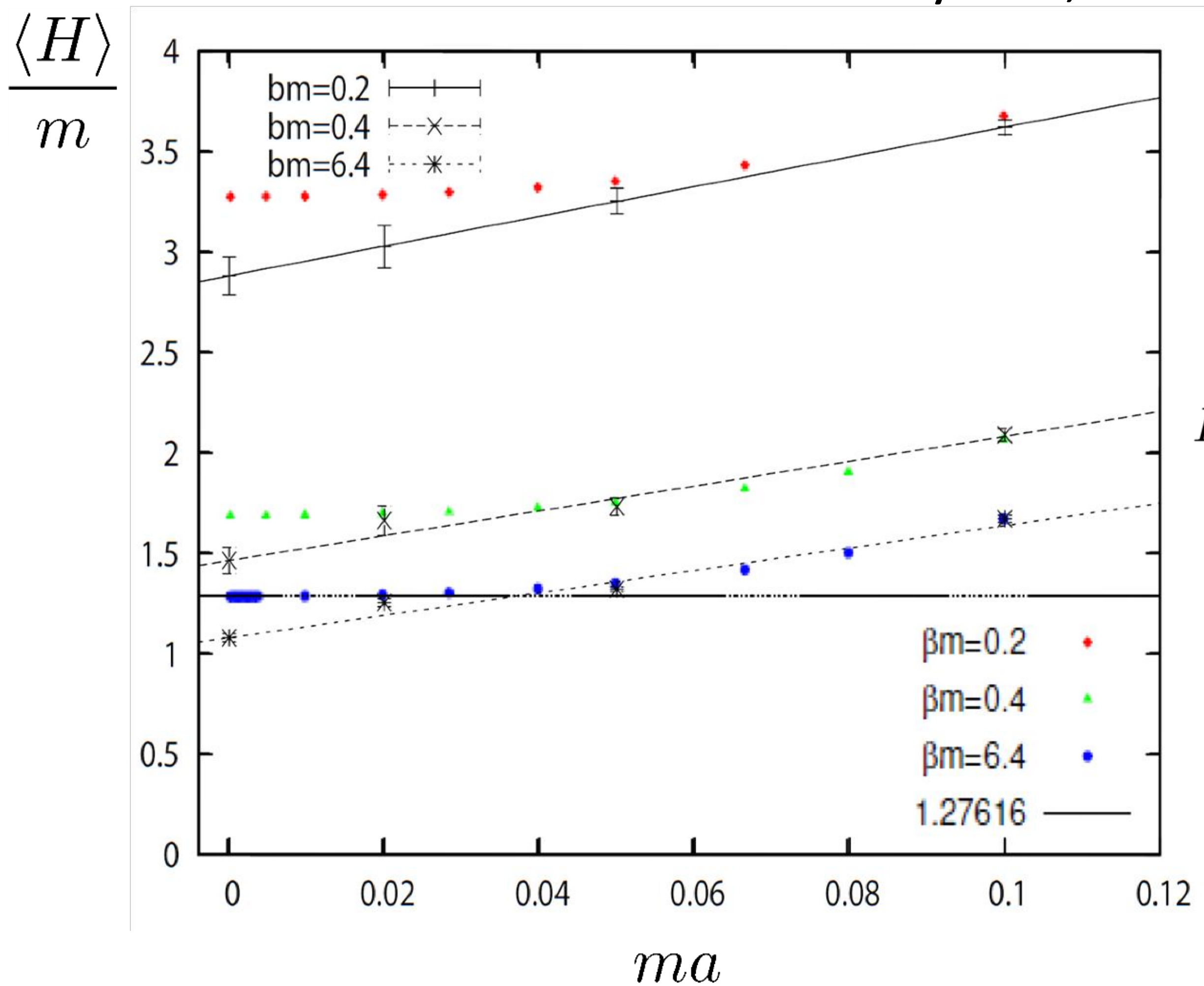
$$T_{\phi\phi'} = \sqrt{\frac{g_K(\phi) g_K(\phi')}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\phi - \phi' + W(\phi)\right)^2\right\}$$

$$S_{\phi\phi'} = (1 + W'(\phi)) T_{\phi\phi'}$$

$Z \approx \mathrm{tr}(S^N) - \mathrm{tr}(T^N)$ を直接計算可能

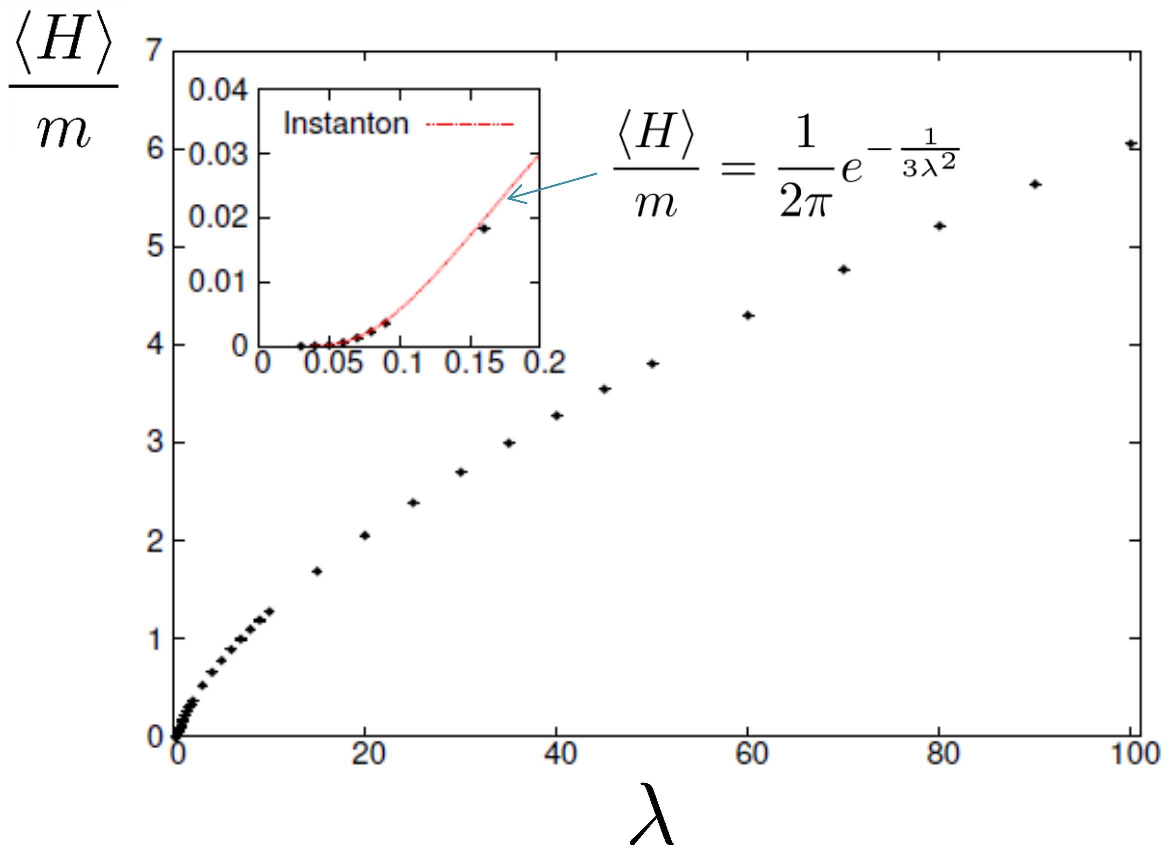
真空エネルギー

D.K. and Nakayama, arXiv:1812.10642



$K = 150 \sim 200$

真空エネルギーの λ 依存性



強結合から弱結合まで計算は正しく機能

2次元の実スカラー ϕ^4 理論

- 格子作用

$$S_{lat} = \sum_n \left\{ \frac{1}{2}(\nabla_\mu \phi_n)^2 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \phi_n^2 + \frac{\lambda_0}{4}\phi_n^4 \right\}$$

連続極限 $\lambda_0 = \lambda a^2 \to 0$

$Z_2 \quad \phi \to -\phi$

- Z2-対称性の破れ

$\langle \phi \rangle = 0$ for $f < f_c$

$\langle \phi \rangle \neq 0$ for $f > f_c \qquad f = \lambda/\mu^2$

TN表示 (2次元格子スカラー理論)

$$Z = \prod_n \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_n \, e^{-S_{lat}}$$

$$Z \approx \prod_n \sum_{\phi_n \in S_K} g_K(\phi_n) \, e^{-\sum_n \left\{ \frac{1}{2}(\phi_n - \phi_{n-\hat{1}})^2 + \frac{1}{2}(\phi_n - \phi_{n-\hat{2}})^2 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \phi_n^2 + \frac{\lambda_0}{4}\phi_n^4 \right\}}$$

$$= \prod_n \sum_{\phi_n \in S_K} \sum_{\phi'_n \in S_K} g_K(\phi_n)$$

$$\times \delta_{\phi_n \phi'_n} \, e^{-\sum_n \left\{ \frac{1}{2}(\phi_n - \phi_{n-\hat{1}})^2 + \frac{1}{2}(\phi'_n - \phi'_{n-\hat{2}})^2 + \frac{1}{4}\mu_0^2 (\phi_n^2 + \phi_n'^2) + \frac{\lambda_0}{8}(\phi_n^4 + \phi_n'^4) \right\}}$$

$$\parallel$$

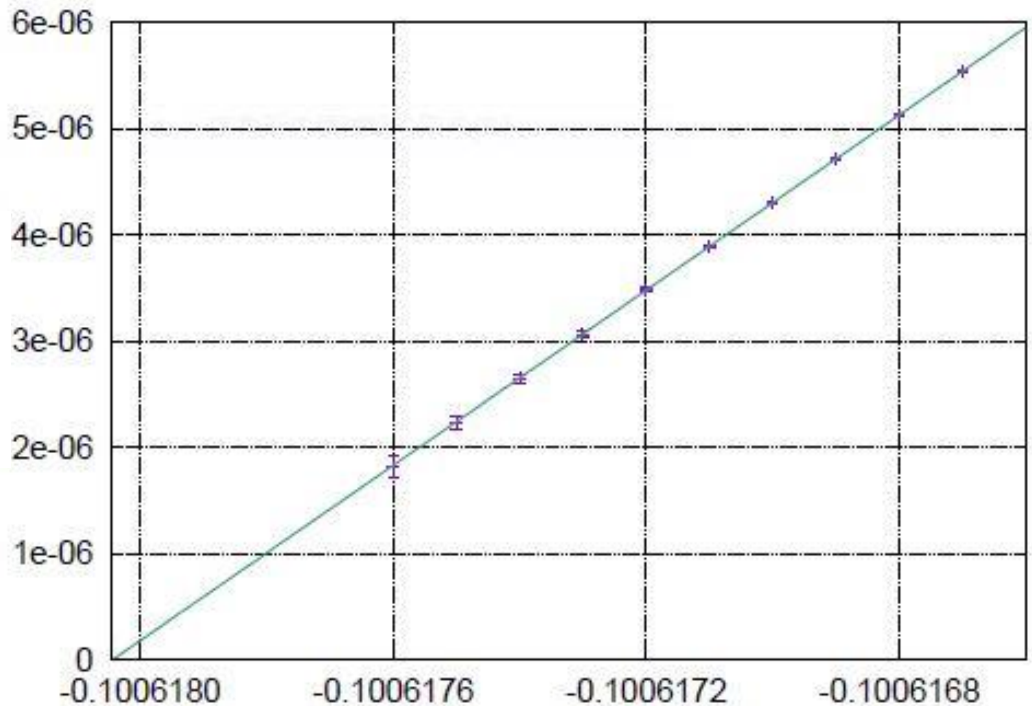
$$T_{\phi_n \phi'_n \phi_{n-\hat{1}} \phi'_{n-\hat{2}}}$$

$$= \prod_n \sum_{\phi_n \in S_K} \sum_{\phi'_n \in S_K} T_{\phi_n \phi'_n \phi_{n-\hat{1}} \phi'_{n-\hat{2}}}$$

感受率

D.K., Kuramashi, Nakamura, Sakai, Takeda, Yoshimura, JHEP 1905 (2019) 184

$\chi^{-\frac{1}{1.75}}$



m_0^2

$\lambda = 0.05$

$V = 2^{20} \times 2^{20}$

$K = 256$

$D_{cut} = 32$

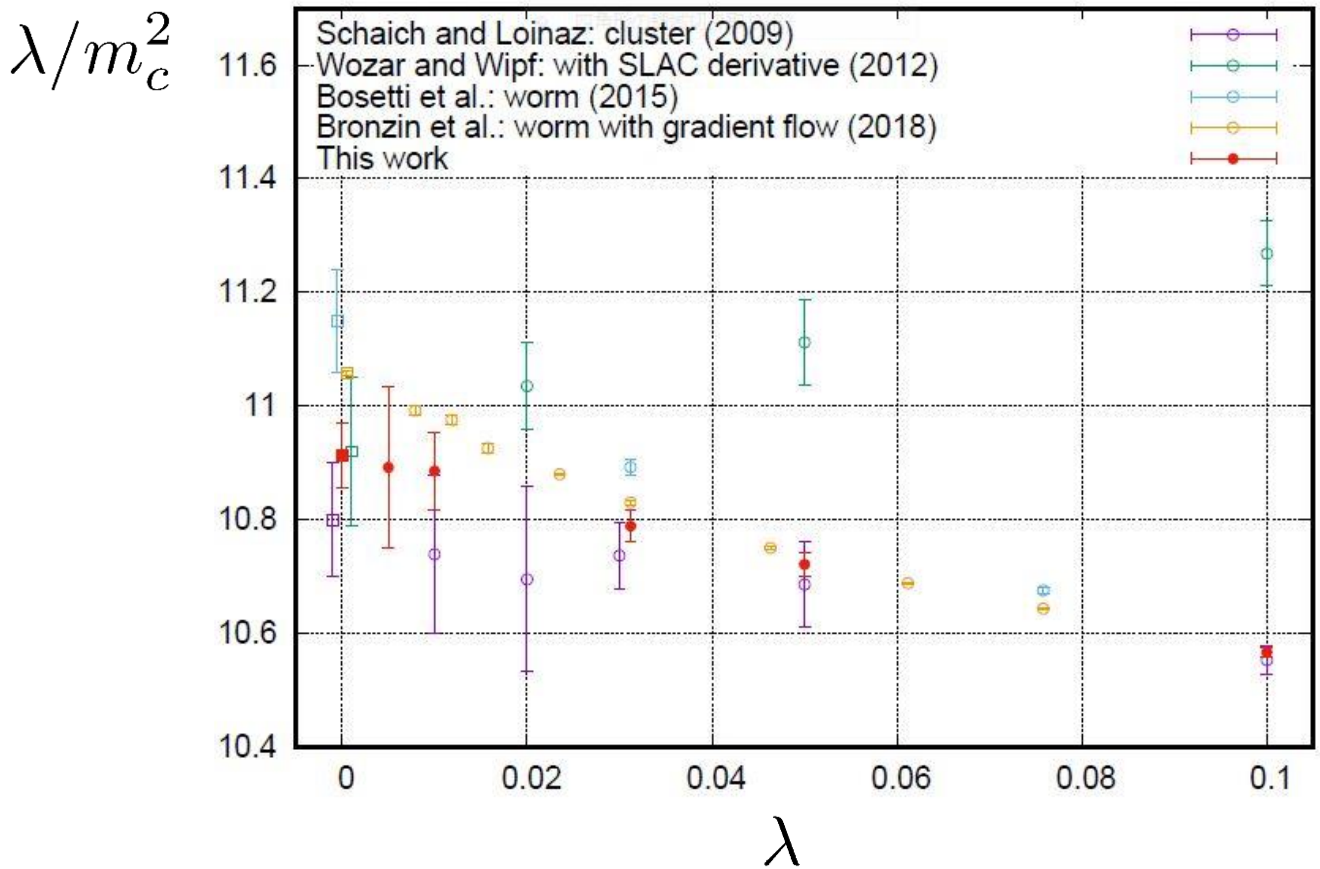
$$\chi = \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial h}$$

$\chi \propto |m_0 - m_{0c}|^{-\gamma}$ $\quad \gamma = 1.75$

臨界指数

臨界結合定数

D.K., Kuramashi, Nakamura, Sakai,
Takeda, Yoshimura, JHEP 1905 (2019) 184



何の改良もないTRGでD=64までの計算でも良い精度
ナイーブな求積法で十分機能

4. 有限密度の複素スカラー理論

有限密度の2次元複素スカラー理論

- 連続理論の作用

$$S = \int d^2x \, \{|\nabla_\rho \phi|^2 + (m^2 - \mu^2)|\phi|^2 + \mu(\partial_0 \phi^* \phi - \phi^* \partial_0 \phi) + \lambda \phi^4\}$$

$m^2, \lambda > 0$　　質量と結合定数

$\mu \geq 0$　　化学ポテンシャル

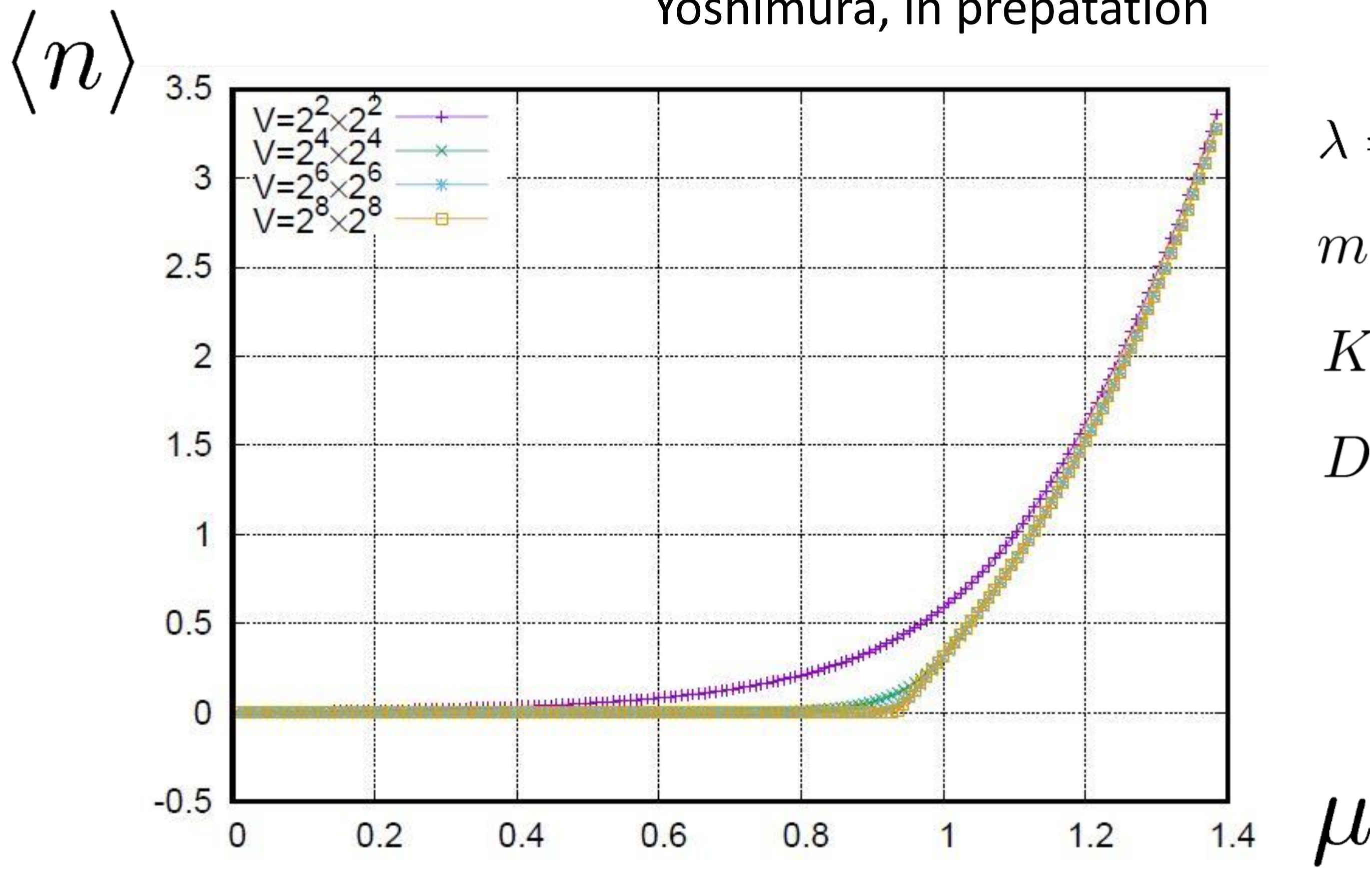
- 複素位相問題(負符号問題)

$$S[\mu]^* = S[-\mu]$$

- Silver Blaze現象
  バルクの物理量は $\mu < \mu_c$ では化学ポテンシャルに依存しない

数密度

D.K., Kuramashi, Nakamura, Sakai, Takeda, Yoshimura, in prepatation



$\lambda = 1$

$m^2 = 0.01$

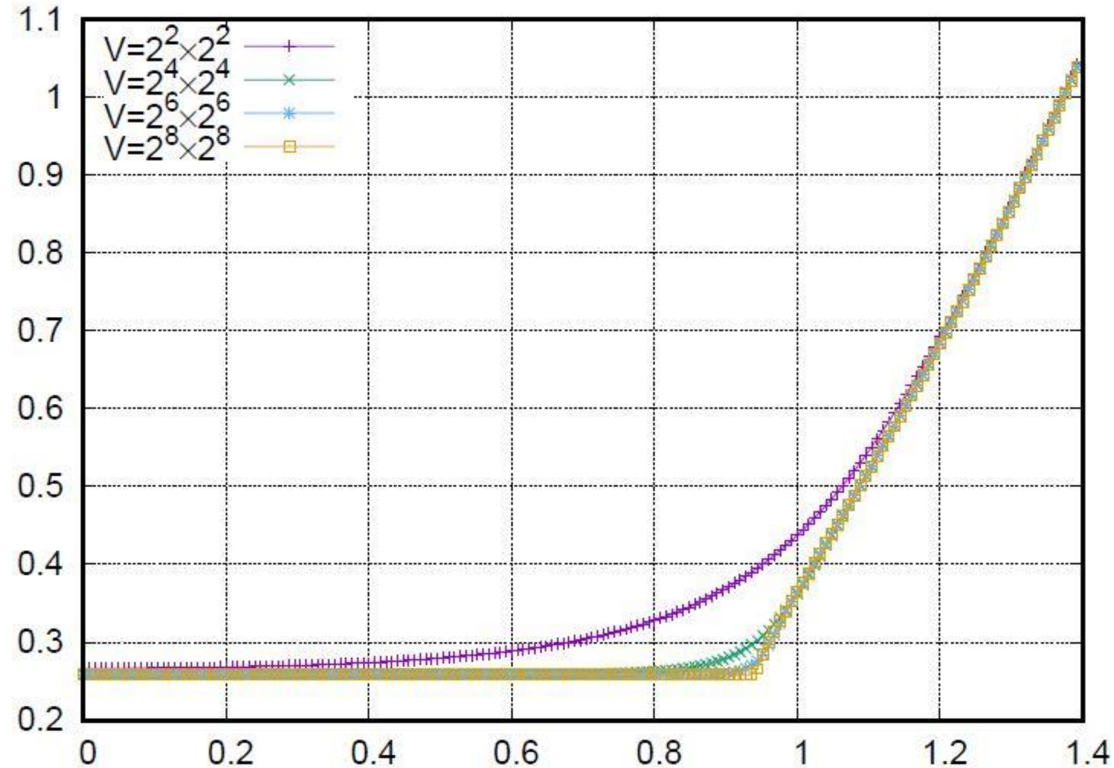
$K = 64$

$D_{cut} = 64$

大きな体積ではっきりとしたSilver Blaze

$|\phi|^2$ の期待値

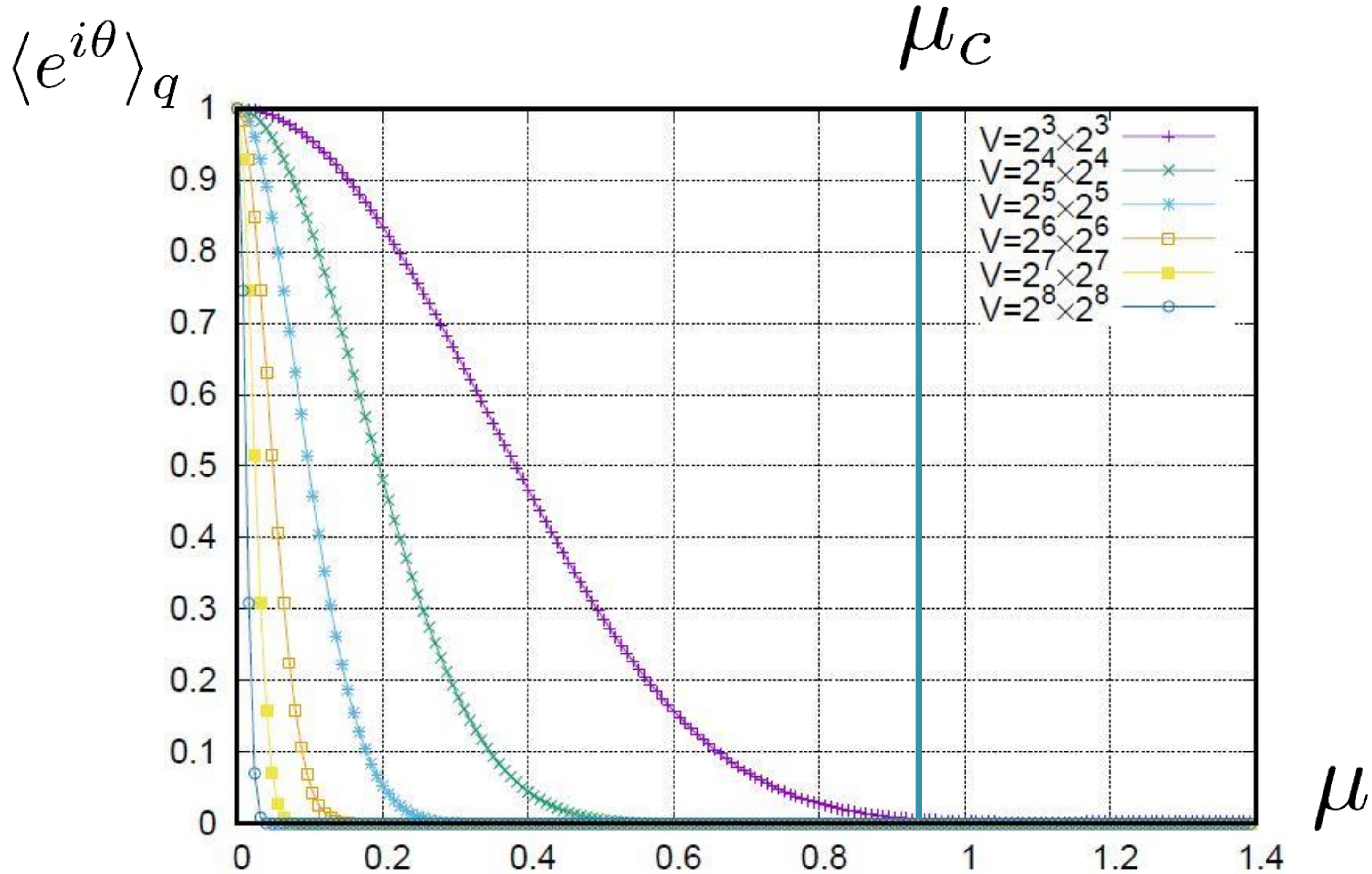
$\langle|\phi|^2\rangle$



μ

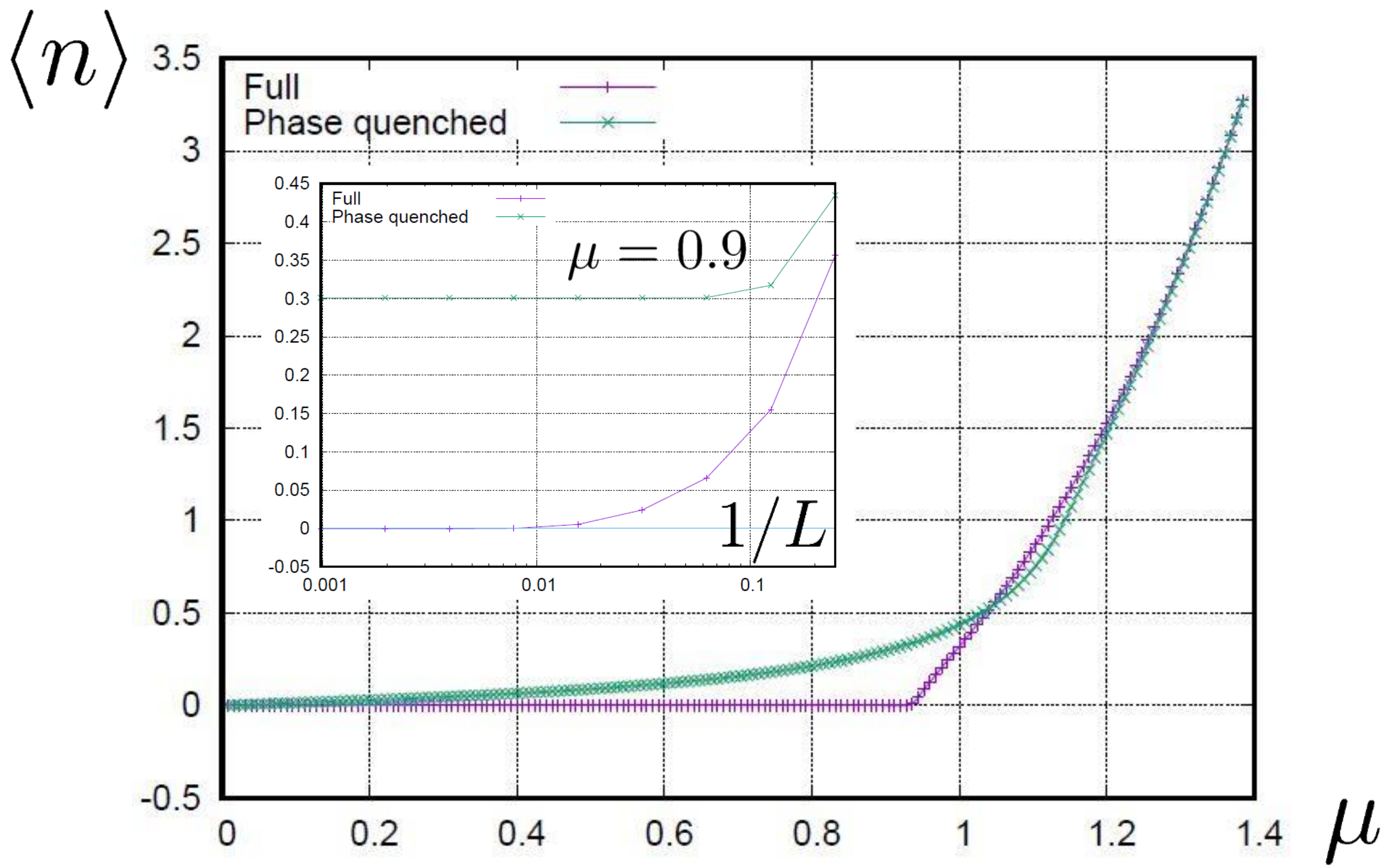
数密度と同様の結果が見られる

位相の期待値



体積を大きくすれば
サイン問題はより深刻になる

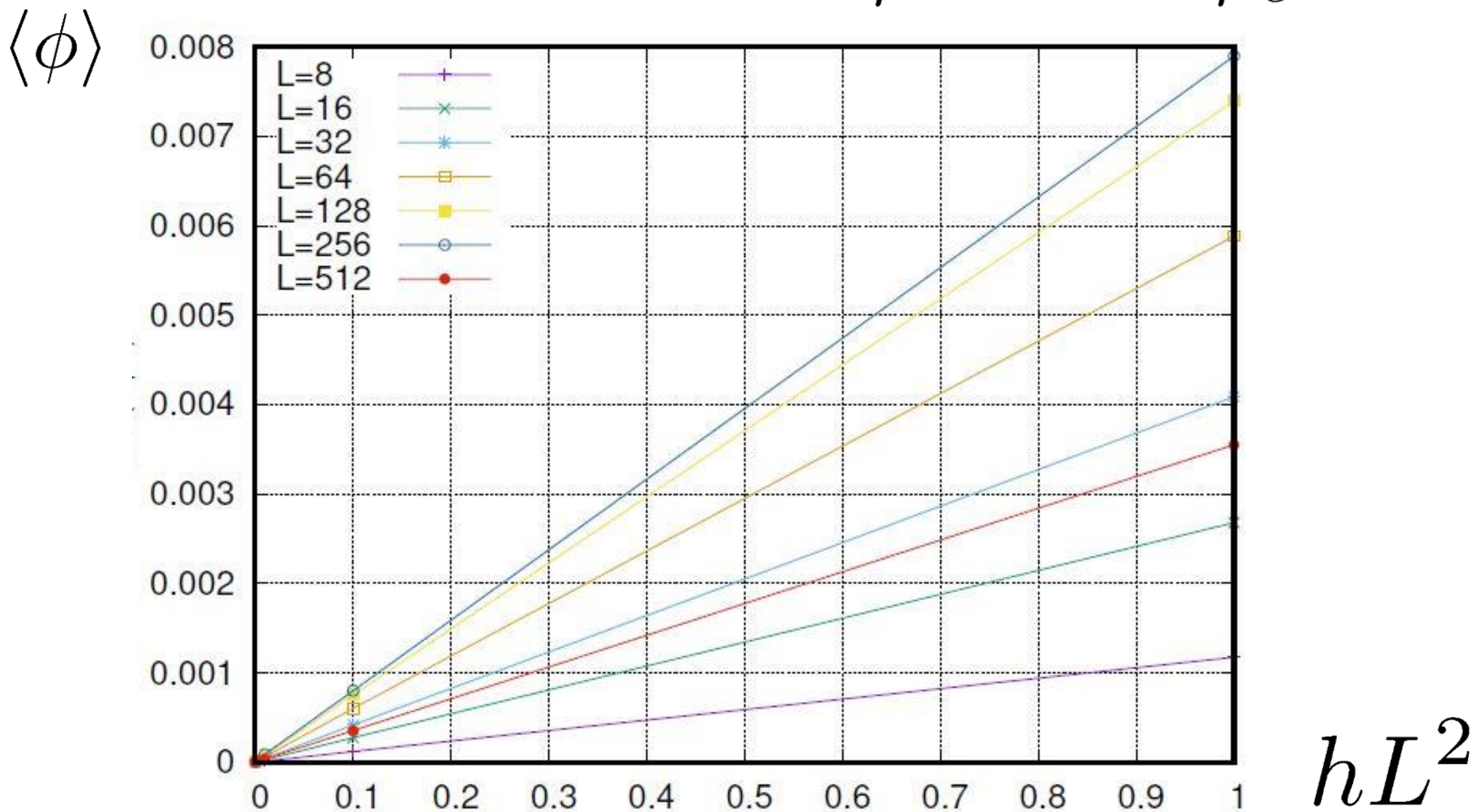
Silver Blaze vs. 位相



位相を無視するとSilver Blazeは得られない

Colemanの定理

$$\mu = 1.1 > \mu_c$$



外場を0に近づけると、スカラー場の１点の期待値は0に近づきU(1)対称性は破れない

5. フェルミオン系でのTRG

Gross-Neveu 模型

- 格子作用

$$S = \sum_n \bar{\psi}_n D \psi_n + \frac{g^2}{2N}[(\bar{\psi}_n \psi_n)^2 + (\bar{\psi}_n i\gamma_5 \psi_n)^2]$$

$$D = \gamma_\mu \frac{\partial_\mu + \partial_\mu^*}{2} - \frac{1}{2}\partial_\mu \partial_\mu^* + m$$

$\partial_\mu, \partial_\mu^*$: 前方、後方差分

- Grassmann-TRG (Gu et al.,2010) を用いたTRG計算の実現　　Takeda-Yoshimura, 2015

Nf=1 GN模型のGrassmann-TRG計算

Takeda-Yoshimura, 2015

$$
\begin{aligned}
Z &= \int D\psi D\bar{\psi} e^{-S} \\
&= \sum_{x,t} \int T_{x_{n,1}x_{n,2}t_{n,1}t_{n,2}x_{n-\hat{1},1}x_{n-\hat{1},2}t_{n-\hat{2},1}t_{n-\hat{2},2}} \\
&\times \quad d\bar{\eta}_{n,2}^{x_{n,2}} d\eta_{n,1}^{x_{n,1}} d\bar{\xi}_{n,2}^{t_{n,2}} d\xi_{n,1}^{t_{n,1}} d\eta_{n,2}^{x_{n-\hat{1},2}} d\bar{\eta}_{n,1}^{x_{n-\hat{1},1}} d\xi_{n,2}^{t_{n-\hat{2},2}} d\bar{\xi}_{n,2}^{t_{n-\hat{2},1}} \\
&\times \quad (\bar{\eta}_{n+\hat{1},1}\eta_{n,1})^{x_{n,1}} (\bar{\eta}_{n,2}\eta_{n+\hat{1},2})^{x_{n,2}} (\bar{\xi}_{n+\hat{2},1}\xi_{n,1})^{t_{n,1}} (\bar{\xi}_{n,2}\xi_{n+\hat{2},2})^{t_{n,2}}
\end{aligned}
$$

$\eta_{n,i}, \xi_{n,i}$ グラスマン数

Grassmann-TRG
= SVD + グラスマン数の分解

非常に複雑かつTRGとGTRGの対応も不明瞭…

TRG vs. Grassmann-TRG

TRG (Levin-Nave,2007)	GTRG (Gu et al. 2010)
テンソル T_{ijkl}	グラスマンテンソル ?
縮約 $\sum_i$	グラスマンテンソルの縮約?
テンソルネットワーク N個のテンソルの縮約が取られたもの	グラスマンテンソルネットワーク $Z = \sum_{x,t} T_{xt\ldots} d\bar{\eta}^x d\eta^x \ldots (\bar{\eta}\eta)^x \ldots$
繰り込み SVD	繰り込み SVD +グラスマン数の分解
TNの対称性 $T'_{ijkl} = M^{-1}_{ii'} T_{i'jk'l} M_{k'k}$	グラスマンTNの対称性 ?

グラスマンテンソルの定義

D.K., in preparation

- グラスマン添え字

$$\Xi = (\xi, i)$$

ξ グラスマン数
$i = 0, 1$ 占有数

$$\xi^i$$

- グラスマンテンソル $\hat{T}$ for T

$$\hat{T}_{\Xi_1 \Xi_2, \cdots \Xi_n} \equiv T_{i_1 i_2, \cdots i_n} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \cdots \xi_n^{i_n}$$

$T_{i_1 i_2, \cdots i_n}$: 成分テンソル

グラスマンテンソルの縮約

- Ξ_k から Ξ_l への縮約

$$\hat{T}_{\Xi_1\cdots\check{\Xi}_k\cdots\check{\Xi}_l\cdots\Xi_n} = \sum_{i=0}^{1}\int_\eta \hat{T}_{\Xi_1\cdots\cdots\Xi_n}\Big|_{\Xi_k=(d\eta,i),\Xi_l=(\eta,i)}$$

$$\Xi_k\cdots\Xi_l \to {}^{\Xi}\cdots{}_{\Xi}$$

- 例) $\hat{T}_{XYZ} = T_{ijk}\chi^i\eta^j\zeta^k$ (3-ランクのテンソル)

$$\hat{T}^{X}{}_{YX} = \int_\chi \sum_{i=0}^{1} T_{iji}\,d\chi^i\eta^j\chi^i = \underbrace{\sum_{i=0}^{1} T_{iji}(-1)^{ij}\eta^j}_{\text{成分テンソル}}$$

1-ランクのテンソル

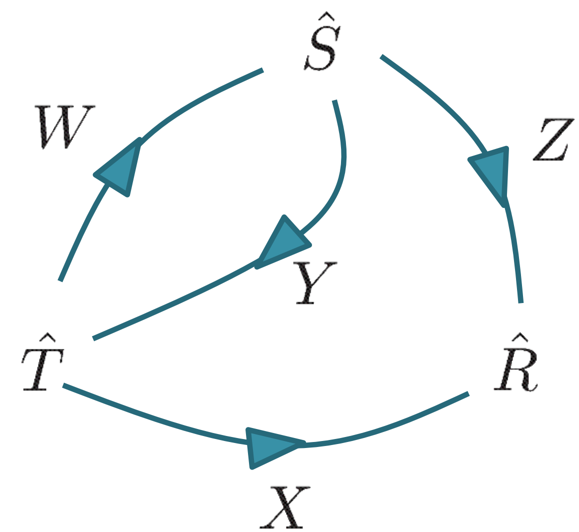
グラスマンテンソルネットワーク

- Grassmann-TNの定義

  N個のグラスマンテンソルの積の添え字の縮約が取られたもの

- 例)

$$Z = \hat{T}^{WX}{}_{Y}\hat{S}_{W}{}^{YZ}\hat{R}_{ZX}$$



グラスマンテンソルネットワーク表示

- 単純化された模型

$$S = \sum_n \{ -\bar{\psi}_{n+\hat{1}}\psi_n - \bar{\psi}_{n+\hat{2}}\psi_n + m\bar{\psi}_n\psi_n \} \qquad Z = \int \prod_n d\bar{\psi}_n d\psi_n e^{-S}$$

- ホッピング項の分離

$$e^{\bar{\psi}_{n+\hat{1}}\psi_n} = \sum_{x_n=0}^{1} (\bar{\psi}_{n+\hat{1}}\psi_n)^{x_n} = \int_\eta \sum_{x_n=0}^{1} (\bar{\psi}_{n+\hat{1}} d\eta_n)^{x_n} (\eta_n\psi_n)^{x_n}$$

$$e^{\bar{\psi}_{n+\hat{2}}\psi_n} = \int_\eta \sum_{t_n=0}^{1} (\bar{\psi}_{n+\hat{2}} d\chi_n)^{t_n} (\chi_n\psi_n)^{t_n}$$

- 分配関数のGTN表示

$$Z = \prod_n T_{x_n t_n x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}} \eta_n^{x_n} \chi_n^{t_n} d\eta_{n-\hat{1}}{}^{x_{n-\hat{1}}} d\chi_{n-\hat{2}}{}^{t_{n-\hat{2}}} = \prod_n \hat{T}_{X_n Y_n}{}^{X_{n-\hat{1}} Y_{n-\hat{2}}}$$

$$T_{ijkl} = \int d\bar{\psi} d\psi \, e^{-m\bar{\psi}\psi} \bar{\psi}^{k+l} (-\psi)^{i+j}$$

グラスマン特異値分解(Grassmann-SVD)

- 成分テンソル T のSVD

$$T = U\sigma V = AB$$

ただし $A = U\sqrt{\sigma}, B = \sqrt{\sigma}V$

- グラスマンテンソル $\hat{T}$ を2つのグラスマンテンソル $\hat{A}$ と $\hat{B}$ に分離できる

$$\hat{T}_{\Xi_1\cdots\Xi_{2n}} = \hat{A}_{\Xi_1\cdots\Xi_n}{}^{X_n\cdots X_1}\hat{B}_{X_1\cdots X_n\Xi_1\cdots\Xi_n}$$

グラスマンSVDを用いた繰り込み群

- グラスマンテンソルのGrassmann-SVD

$$\hat{T}^{IJ}{}_{KL} \approx \hat{S}^{(1)IJ}{}_{M}\hat{S}^{(3)M}{}_{KL}$$

$$\hat{T}^{IJ}{}_{KL} \approx \hat{S}^{(2)}{}_{LI}{}^{M}\hat{S}^{(4)}{}_{M}{}^{JK}$$

- 繰り込み変換(Grassman-TRG)

$$Z = \prod_{n} \hat{T}^{X_n T_n}{}_{X_{n-\hat{1}} T_{n-\hat{2}}} \approx \prod_{n'} \hat{R}^{X_{n'} T_{n'}}{}_{X_{n'-\hat{1}} T_{n'-\hat{2}}}$$

$$\hat{R}_{IJKL} = \hat{S}^{(3)}{}_{AIB}\,\hat{S}^{(4)B}{}_{JC}\,\hat{S}^{(1)C}{}_{K}{}^{D}\,\hat{S}^{(2)}{}_{DL}{}^{A}$$

TRG vs. Grassmann-TRG

TRG (Levin-Nave,2007)	GTRG (Gu et al. 2010)
テンソル T_{ijkl}	グラスマンテンソル ？
縮約 $\sum_i$	グラスマンテンソルの縮約?
テンソルネットワーク N個のテンソルの縮約が取られたもの	グラスマンTN $Z = \sum_{x,t} T_{xt\ldots} d\bar{\eta}^x d\eta^x \ldots (\bar{\eta}\eta)^x \ldots$
繰り込み SVD	繰り込み SVD +グラスマン数の分解
TNの対称性 $T'_{ijkl} = M^{-1}_{ii'} T_{i'jk'l} M_{k'k}$	グラスマンTNの対称性 ？

対応規則

TRG (Levin-Nave,2007)	GTRG (D.K., in preparation)
テンソル T_{ijkl}	グラスマンテンソル $\hat{T}_{\Xi_1\Xi_2,\cdots\Xi_n} = T_{i_1 i_2,\cdots i_n}\xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}\cdots\xi_n^{i_n}$
縮約 $\sum_i$	縮約 $\int_\eta \sum_i$
テンソルネットワーク N個のテンソルの縮約が取られたもの	グラスマンTN N個のグラスマンテンソルの縮約が取られたもの
繰り込み SVD	繰り込み Grassmann-SVD
TNの対称性 $T'_{ijkl} = M^{-1}_{ii'} T_{i'jk'l} M_{k'k}$	Grassmann TNの対称性 $\hat{T}'_{ijkl} = (\hat{M}^{-1})_i{}^{i'} \hat{T}_{i'jk'l} \hat{M}^{k'}{}_k$

6. まとめ

結論

- テンソルネットワークの方法

良い点: 負符号問題なし&統計誤差なし

大体積OK

自由エネルギーの直接計算OK

悪い点: 連続変数(スカラー理論)？　解決

フェルミオン系での簡単な定式化？　解決

高次元 or 内部自由度大きいとコスト増

ゲージ理論？

今後の課題

- 高次元化

  この1年のうちに大きな進展があるだろう
  → 春の学会・来年の離散研で話す予定

- ゲージ理論

  アイデアが必要だが解決できそうな問題

  c.f. Schwinger模型でのキャラクター展開
  (Shimizu-Kuramashi, 2013)

- 内部自由度が高い系(例:ラージNゲージ理論)

  おそらく最も深刻な問題　　量子コンピュータ?