MITSUHIRO KATO　　2019.09.10@松江

格子超対称性を

巡回Leibniz則で手懐ける

Plan of the Talk

- **Introduction** なぜ格子超対称性は難しいのか？
- **Nilpotent SUSY** Cyclic Leibniz Rule
- **N=2 SUSY SYK model** 応用例として
- **Summary**

Collaboration with M.Sakamoto and H.So

INTRODUCTION

なぜ格子超対称性は難しいのか？

なぜ格子超対称性は難しいのか？

$$\{Q, \bar{Q}\} \propto P$$

次の条件を全て満たす作用は構成できない　No-Go定理

- 無限小並進不変性
- 局所性
- 場の３体以上の項を含む

なぜ格子超対称性は難しいのか？

$$\{Q, \bar{Q}\} \propto P$$

次の条件を全て満たす作用は構成できない　No-Go定理

- 無限小並進不変性
- 局所性
- ~~場の３体以上の項を含む~~

自由場なら可能

なぜ格子超対称性は難しいのか？

$$\{Q, \bar{Q}\} \propto P$$

次の条件を全て満たす作用は構成できない　No-Go定理

- 無限小並進不変性
- ~~局所性~~
- 場の３体以上の項を含む

局所性を犠牲にすれば可能

→ SUSY不変な非局所作用 S.Nojiri (1985)

なぜ格子超対称性は難しいのか？

$$\{Q, \bar{Q}\} \propto P$$

次の条件を全て満たす作用は構成できない　No-Go定理

- ~~無限小並進不変性~~
- 局所性
- 場の３体以上の項を含む

無限小並進を含まない部分代数のみを実現！

なぜ格子超対称性は難しいのか？

- 格子理論における「局所性」に関する注意

連続極限は、繰り込まれた物理量を有限に保って
２次相転移点（UV固定点）に近づけることで実現

裸の物理量は、相関長とともに発散

格子上で有限の指数関数的減衰スケールを持つ量は
「局所的」

なぜ格子超対称性は難しいのか？

- 無限小並進を含む代数

Type i) $[A\,,B]_{\mp} \propto P_\mu$

Type ii) $[A\,,P_\mu] \propto B$

Type iii) $[A\,,P_\mu] \propto a_\mu{}^\nu P_\nu$

なぜ格子超対称性は難しいのか？

- 無限小並進を含む代数

	Poincaré	Conformal	SUSY	Super-conformal
Type i)			○	○
Type ii)		○		○
Type iii)	○	○	○	○

なぜ格子超対称性は難しいのか？

- 作用 S に対して $\delta_A S = \delta_B S = 0$ のとき

代数の整合性より

i) $[A\,, B]_{\mp} \propto P_\mu$

ii) $[A\,, P_\mu] \propto B$

iii) $[A\,, P_\mu] \propto a_\mu{}^\nu P_\nu$

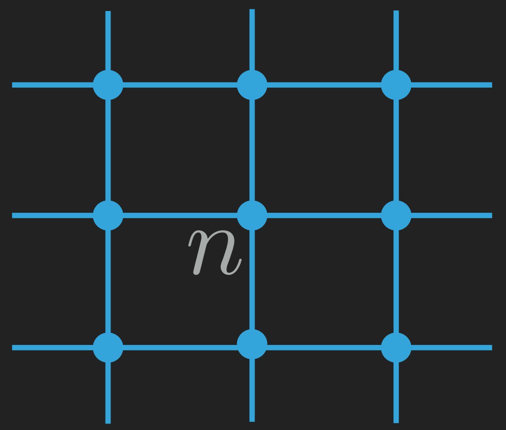
Type i) ➡ $\delta_{P_\mu} S = 0$

Type ii) ➡ $\delta_A \delta_{P_\mu} S = 0$

Type iii) ➡ $\delta_A \delta_{P_\mu} S = a_\mu{}^\nu \delta_{P_\nu} S$

Type i) が最も強い（SUSY不変な作用に対する要請）

なぜ格子超対称性は難しいのか？



- 無限小並進 δ_{P_μ} の格子上での表現
  - 線形表現 $(\delta_{P_\mu}\phi)_n = -i\Delta^\mu_{nm}\phi_m$
  - 連続極限 $\delta_{P_\mu}\phi \xrightarrow{a\to 0} -i\partial^\mu\phi$

つまり Δ^μ は、差分と同じ

- N体作用（線形表現なので同次式を調べれば十分）

$$S^{(N)} = \sum_{\{n^{(i)}\}} M_{n^{(1)}n^{(2)}\dots n^{(N)}}\phi^{(1)}_{n^{(1)}}\phi^{(2)}_{n^{(2)}}\cdots\phi^{(N)}_{n^{(N)}}$$

なぜ格子超対称性は難しいのか？

- No-go theorem

Δ^{μ}_{nm} と $M_{n^{(1)}n^{(2)}\dots n^{(N)}}$ に対し

- 離散（格子）並進不変性
- 局所性

を要請すると $\delta_{P_\mu} S = 0$ をみたす表現は、

N>2では存在しない

- N=1,2では存在する（自由場は作れる）

なぜ格子超対称性は難しいのか？

これは、 差分のLeibniz則に対する No-go 定理と等価

Δ^{μ}_{nm} と $M_{n(1)n(2)\ldots n(N)}$ に対し

- 離散（格子）並進不変性
- 局所性

を要請すると Leibniz rule をみたす表現は、

（N>2）存在しない

MK-Sakamoto-So (JHEP 2008)

なぜ格子超対称性は難しいのか？

証明の概要

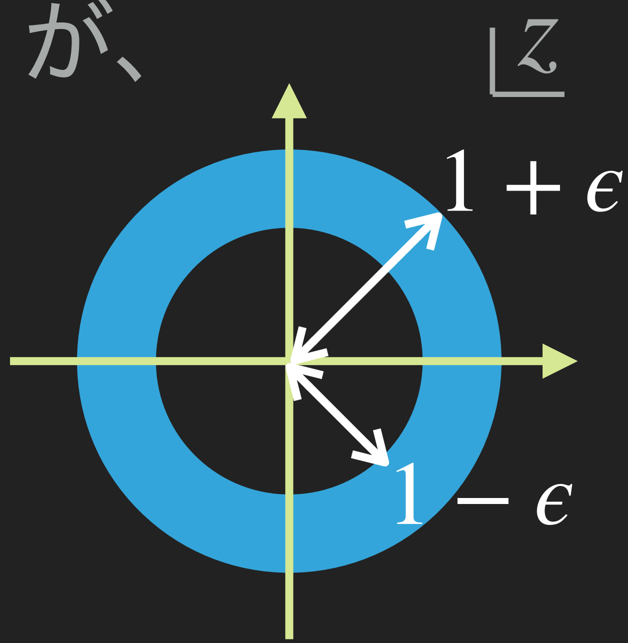
離散並進不変性

差分演算子 $\Delta_{nm} = \Delta(n-m)$ に対して

局所性 $\longrightarrow |\Delta(n-m)| < A\exp(-B|n-m|)$

これは、複素関数 $\tilde{\Delta}(z) = \sum_k \Delta(k) z^k$ が、

右の円環領域で正則であることを要求

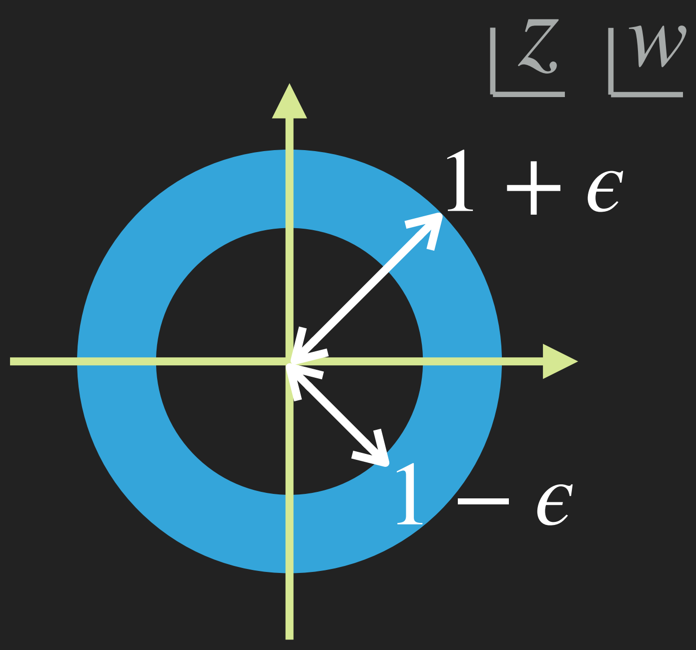


なぜ格子超対称性は難しいのか？

証明の概要

同様に、積 $M_{nml} = M(n-m, n-l)$ に対しても

$\tilde{M}(z,w) = \sum_{k,l} M(k,l) z^k w^l$ は、二重円環領域で正則



なぜ格子超対称性は難しいのか？

証明の概要

（簡単のため対称型 $\Delta_{nm} = -\Delta_{mn}$ で示す。
一般の差分でも同様に示せる）

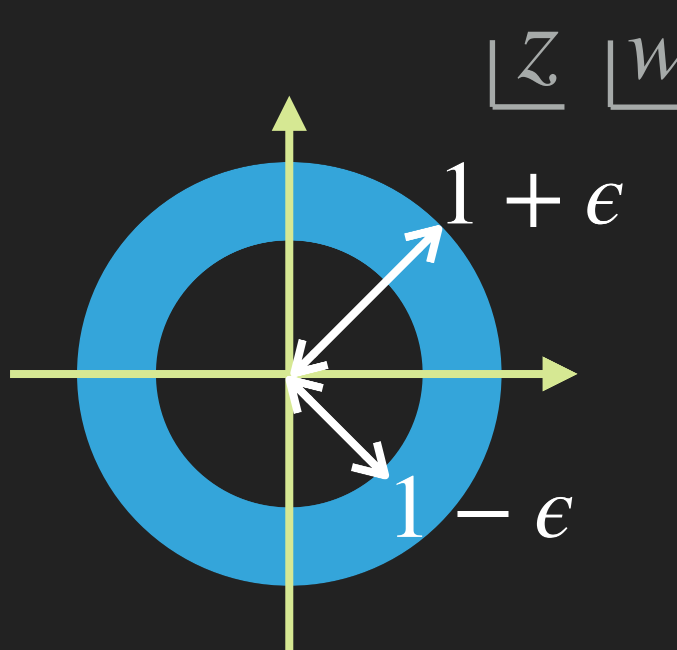
Leibniz Rule $$\sum_k \left(\Delta_{kl} M_{kmn} + \Delta_{km} M_{lkn} + \Delta_{kn} M_{lmk}\right) = 0$$

↓

$$\left(\tilde{\Delta}(1/zw) + \tilde{\Delta}(z) + \tilde{\Delta}(w)\right) \tilde{M}(z,w) = 0$$

↓ $\tilde{M}(z,w)$ の正則性

$$\tilde{\Delta}(1/zw) + \tilde{\Delta}(z) + \tilde{\Delta}(w) = 0$$



なぜ格子超対称性は難しいのか？

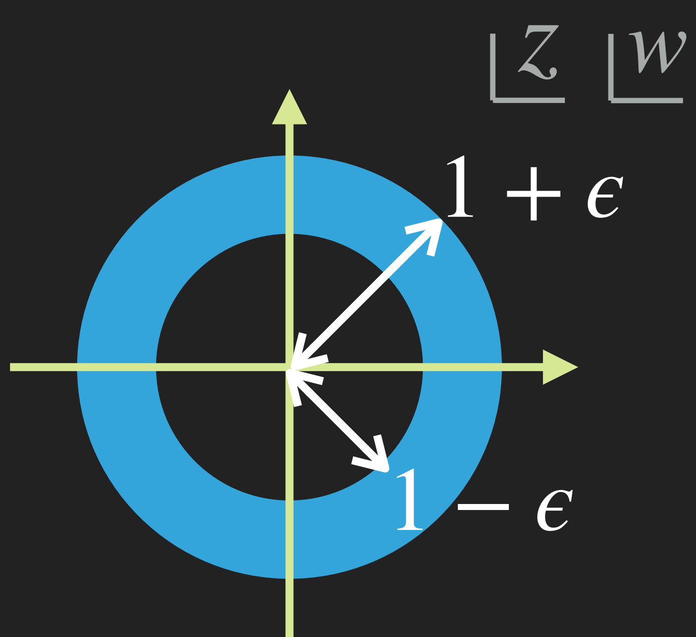
証明の概要

$$\tilde{\Delta}(1/zw) + \tilde{\Delta}(z) + \tilde{\Delta}(w) = 0$$

↓

これを満たすのは、$\tilde{\Delta}(z) \propto \log z$　のみ

しかし、これは円環領域で正則でない



なぜ格子超対称性は難しいのか？

制限を回避するためには？

- 有限変換の表現を考える？

  Grassmann even の"格子"全体を含める必要がある

  $n \longrightarrow n + \bar{\epsilon}\epsilon$ タイプの"並進"の扱い

- 非自明な co-product を考える？

  Hopf 代数的拡張（Kawamoto グループ）

NILPOTENT SUSY

Cyclic Leibniz Rule (CLR)

NILPOTENT SUSY を実現する

- Full SUSY を実現することは諦めて、Nilpotent subalgebra だけを実現しよう

$$\{Q_i\,, Q_j\} = 0$$

- このアイデアの源流は、 Sakai-Sakamoto (1983)
- それでもなお非自明（変換に差分が含まれるため）

Leibniz 則が障害

NILPOTENT SUSY を実現する

- Supersymmetric quantum mechanics

$$S = \int dt \left\{ \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + i\bar{\psi}\dot{\psi} + \frac{1}{2}F^2 + iFW(\phi) + i\bar{\psi}W'(\phi)\psi \right\}$$

- N=2 SUSY

$$\delta_Q \phi = \bar{\psi} \qquad \delta_{\bar{Q}} \phi = -\psi$$

$$\delta_Q \psi = i\partial_t \phi + F \qquad \delta_{\bar{Q}} \psi = 0$$

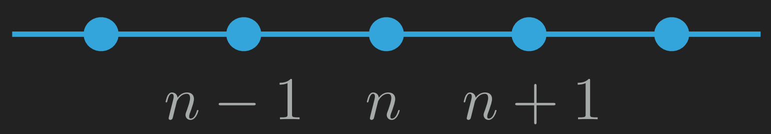
$$\delta_Q \bar{\psi} = 0 \qquad \delta_{\bar{Q}} \bar{\psi} = -i\partial_t \phi + F$$

$$\delta_Q F = -i\partial_t \bar{\psi} \qquad \delta_{\bar{Q}} F = -i\partial_t \psi$$

NILPOTENT SUSY を実現する

$$W(\phi) = m\phi + \frac{1}{2} g \phi^2$$

- 格子化



$$\Delta_{mn} = -\Delta_{nm}$$

$$S_0 = \sum_n \left\{ \frac{1}{2} (\Delta\phi)_n^2 + \bar{\psi}_n (\Delta\psi)_n + \frac{1}{2} F_n^2 \right\}$$

$$S_m = im \sum_n \{ F_n \phi_n + \bar{\psi}_n \psi_n \}$$

$$S_{\mathrm{int}} = \frac{ig}{2} \sum_{l,m,n} \{ M_{lmn} F_l \phi_m \phi_n + 2 N_{lmn} \phi_l \bar{\psi}_m \psi_n \}$$

NILPOTENT SUSY を実現する

- δ_Q 不変性のみを課す

$$Q^2 = 0$$

$$\delta_Q \phi_n = \bar{\psi}_n$$
$$\delta_Q \psi_n = i(\Delta\phi)_n + F_n$$
$$\delta_Q \bar{\psi}_n = 0$$
$$\delta_Q F_n = -i(\Delta\bar{\psi})_n$$

$$M_{lmn} = M_{lnm} = N_{nml} = N_{mnl}$$

$$\sum_k (\Delta_{kl} M_{kmn} + \Delta_{km} M_{knl} + \Delta_{kn} M_{klm}) = 0$$

Cyclic Leibniz Rule (CLR)

NILPOTENT SUSY を実現する

Leibniz Rule

$$\Delta(\phi * \psi) = \Delta\phi * \psi + \phi * \Delta\psi$$

$$\sum_k \left(\Delta_{kl} M_{kmn} + \Delta_{km} M_{\underline{lkn}} + \Delta_{kn} M_{\underline{lmk}}\right) = 0$$

Cyclic Leibniz Rule

$$\sum_k \left(\Delta_{kl} M_{kmn} + \Delta_{km} M_{\underline{knl}} + \Delta_{kn} M_{\underline{klm}}\right) = 0$$

NILPOTENT SUSY を実現する

- 以下の３条件を満たす Δ_{mn} と M_{lmn} の組は存在しない
    - 離散（格子）並進不変性
    - 局所性
    - Leibniz Rule MK-Sakamoto-So (JHEP 2008)

- 以下の３条件を満たす Δ_{mn} と M_{lmn} の組は多数存在
    - 離散（格子）並進不変性
    - 局所性
    - Cyclic Leibniz Rule MK-Sakamoto-So (JHEP 2013)

NILPOTENT SUSY を実現する

Cyclic Leibniz Rule

$$\sum_k \left(\Delta_{kl} M_{kmn} + \Delta_{km} M_{knl} + \Delta_{kn} M_{klm}\right) = 0$$

- 正則関数に直すと

$$\boxed{\tilde{\Delta}(1/zw)\tilde{M}(z,w) + \tilde{\Delta}(z)\tilde{M}(w,1/zw) + \tilde{\Delta}(w)\tilde{M}(1/zw,z) = 0}$$

この関数方程式を

$$\tilde{\Delta}(1) = 0 \qquad \tilde{\Delta}'(1) = 1 \qquad \tilde{M}(1,1) = 1$$

の条件の下で解く

NILPOTENT SUSY を実現する

- これを満たす解は、例えば

$$\tilde{M}(z,w) = \frac{1}{6}(2zw + zw^{-1} + z^{-1}w + 2z^{-1}w^{-1})$$

$$\tilde{\Delta}(z) = \frac{1}{2}(z - z^{-1})$$

- 座標表示に戻せば

$$M_{lmn} = \frac{1}{6}\left(2\delta_{l,m-1}\delta_{l,n-1} + \delta_{l,m+1}\delta_{l,n-1} + \delta_{l,m-1}\delta_{l,n+1} + 2\delta_{l,m+1}\delta_{l,n+1}\right)$$

$$\Delta_{mn} = \frac{1}{2}\left(\delta_{m+1,n} - \delta_{m-1,n}\right)$$

NILPOTENT SUSY を実現する

- 対称差分の場合の一般解　　Kadoh-Ukita (PTEP 2015)

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{\Delta}(z) &= \frac{1}{2}(z - z^{-1}) \\ \tilde{M}(z,w) &= P_1(z,w)B_1(z,w) + P_2(z,w)B_2(z,w)\end{aligned}}$$

where $B_1(z,w) = \dfrac{1}{6}(z + w + z^{-1} + w^{-1} + 2)$

$$B_2(z,w) = \frac{1}{6}(2zw + zw^{-1} + z^{-1}w + 2z^{-1}w^{-1})$$

$P_i(z,w)$ は、$\{z, w, \dfrac{1}{zw}\}$ についての任意の対称式

with $P_1(1,1) + P_2(1,1) = 1$

NILPOTENT SUSY を実現する

- N=2 model（この模型）でやれたこと

  格子上で 1 nilpotent SUSY を実現

  CLRを使う方法では運動項と各相互作用項は独立に不変

  ↓

  格子上で Localization の方法が使える

MK-Sakamoto-So (JHEP 2013)

NILPOTENT SUSY を実現する

- N=4 model では　MK-Sakamoto-So (PTEP 2017)

格子上で 2 nilpotent SUSY を実現可能

“カイラル超場”の類似物が定義できるため
holomorphy の議論が可能

↓

格子上での Non-renormalization theorem

[注意] 格子上で普通のカイラル超場は上手く定義できない
カイラル超場の積はカイラル超場にならない

N=2 SYK MODEL

応用例として　MK-Sakamoto-So (PTEP 2018)

N=2 SUSY SYK MODEL

Fu-Gaiotto-Maldacena-Sachdev (2016)

N=2 SUSY SYK MODEL

Fu-Gaiotto-Maldacena-Sachdev (2016)

SYK: Sachdev-Ye-Kitaev

$$\{\psi^i,\psi^j\}=0 \quad \{\bar\psi^i,\bar\psi^j\}=0 \quad \{\psi^i,\bar\psi^j\}=\delta^{ij}$$

$$Q=iC_{ijk}\psi^i\psi^j\psi^k \qquad \bar Q=i\bar C_{ijk}\bar\psi^i\bar\psi^j\bar\psi^k$$

$$H=\{Q,\bar Q\}$$

C_{ijk} $\bar C_{ijk}$ ：完全反対称ランダム定数

最後に quenched average をとる

N=2 SUSY SYK MODEL

q :奇数

$$S = \int dt \left\{ \bar{\psi}^i \partial_t \psi^i - \bar{b}^i b^i + i^{\frac{q-1}{2}} C_{j_1 j_2 \cdots j_q} \bar{b}^{j_1} \psi^{j_2} \ldots \psi^{j_q} + i^{\frac{q-1}{2}} \bar{C}_{j_1 j_2 \cdots j_q} b^{j_1} \bar{\psi}^{j_2} \ldots \bar{\psi}^{j_q} \right\}$$

$C_{j_1 j_2 \cdots j_q}$ $\bar{C}_{j_1 j_2 \cdots j_q}$ ：完全反対称ランダム定数

$$\delta_{\bar{Q}} \psi^i = \bar{b}^i \qquad \delta_Q \psi^i = 0$$

$$\delta_{\bar{Q}} b^i = \partial_t \bar{\psi}^i \qquad \delta_Q b^i = 0$$

$$\delta_{\bar{Q}} \bar{\psi}^i = 0 \qquad \delta_Q \bar{\psi}^i = b^i$$

$$\delta_{\bar{Q}} \bar{b}^i = 0 \qquad \delta_Q \bar{b}^i = \partial_t \psi^i$$

N=2 SUSY SYK MODEL

- 格子化 $$\begin{aligned} \psi^i(t) &\rightarrow \psi^i_n \\ b^i(t) &\rightarrow b^i_n \\ \bar\psi^i(t) &\rightarrow \bar\psi^i_n \\ \bar b^i(t) &\rightarrow \bar b^i_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S = \bar\psi^i_n \Delta_{nm} \psi^i_m - \bar b^i_n b^i_n &+ i^{\frac{q-1}{2}} C_{j_1 j_2 \cdots j_q} M_{n_1 \overbrace{n_2 \cdots n_q}^{\text{对称}}} \bar b^{j_1}_{n_1} \psi^{j_2}_{n_2} \cdots \psi^{j_q}_{n_q} \\ &+ i^{\frac{q-1}{2}} \bar C_{j_1 j_2 \cdots j_q} \bar M_{n_1 \underbrace{n_2 \cdots n_q}_{\text{对称}}} b^{j_1}_{n_1} \bar\psi^{j_2}_{n_2} \cdots \bar\psi^{j_q}_{n_q} \end{aligned}$$

N=2 SUSY SYK MODEL

- $\delta_{\bar{Q}}$ を選んで不変性を課す

$$
\begin{aligned}
\delta_{\bar{Q}}\psi_n^i &= \bar{b}_n^i \\
\delta_{\bar{Q}}b_n^i &= \Delta_{nm}\bar{\psi}_m^i \\
\delta_{\bar{Q}}\bar{\psi}_n^i &= 0 \\
\delta_{\bar{Q}}\bar{b}_n^i &= 0
\end{aligned}
$$

相互作用項 1

$$
\begin{aligned}
S = & \boxed{\bar{\psi}_n^i \Delta_{nm} \psi_m^i - \bar{b}_n^i b_n^i} + \boxed{i^{\frac{q-1}{2}} C_{j_1 j_2 \cdots j_q} M_{n_1 n_2 \cdots n_q} \bar{b}_{n_1}^{j_1} \psi_{n_2}^{j_2} \cdots \psi_{n_q}^{j_q}} \\
& + \boxed{i^{\frac{q-1}{2}} \bar{C}_{j_1 j_2 \cdots j_q} \bar{M}_{n_1 n_2 \cdots n_q} b_{n_1}^{j_1} \bar{\psi}_{n_2}^{j_2} \cdots \bar{\psi}_{n_q}^{j_q}}
\end{aligned}
$$

運動項

相互作用項 2

N=2 SUSY SYK MODEL

- 運動項 $\delta_{\bar{Q}} S_{\rm kin} = -\bar{\psi}^i_n (\Delta_{nm} + \Delta_{mn}) \bar{b}^i_m$

$\boxed{\Delta_{nm} + \Delta_{mn} = 0}$ ととれば $\delta_{\bar{Q}} S_{\rm kin} = 0$

相互作用項 1

$$S = \underbrace{\boxed{\bar{\psi}^i_n \Delta_{nm} \psi^i_m - \bar{b}^i_n b^i_n}}_{\text{運動項}} + \boxed{i^{\frac{q-1}{2}} C_{j_1 j_2 \cdots j_q} M_{n_1 n_2 \cdots n_q} \bar{b}^{j_1}_{n_1} \psi^{j_2}_{n_2} \cdots \psi^{j_q}_{n_q}}$$
$$+ \boxed{i^{\frac{q-1}{2}} \bar{C}_{j_1 j_2 \cdots j_q} \bar{M}_{n_1 n_2 \cdots n_q} b^{j_1}_{n_1} \bar{\psi}^{j_2}_{n_2} \cdots \bar{\psi}^{j_q}_{n_q}}$$

相互作用項 2

N=2 SUSY SYK MODEL

- 相互作用項 1

$$\delta_{\overline{Q}} S_{\text{int}1} = i^{\frac{q-2}{2}} C_{j_1 j_2 \cdots j_q} M_{n_1 n_2 \cdots n_q} \sum_{k=2}^{q} \bar{b}^{j_1}_{n_1} \psi^{j_2}_{n_2} \cdots \psi^{j_{k-1}}_{n_{k-1}} \bar{b}^{j_k}_{n_k} \psi^{j_{k+1}}_{n_{k+1}} \cdots \psi^{j_q}_{n_q}$$

$\boxed{M_{\overbrace{n_1 n_2 \cdots n_q}^{\text{完全対称}}}}$ ととれば $\delta_{\overline{Q}} S_{\text{int}1} = 0$

$$S = \underbrace{\boxed{\bar{\psi}^i_n \Delta_{nm} \psi^i_m - \bar{b}^i_n b^i_n}}_{\text{運動項}} + \overbrace{\boxed{i^{\frac{q-1}{2}} C_{j_1 j_2 \cdots j_q} M_{n_1 n_2 \cdots n_q} \bar{b}^{j_1}_{n_1} \psi^{j_2}_{n_2} \cdots \psi^{j_q}_{n_q}}}^{\text{相互作用項 1}}$$
$$+ \underbrace{\boxed{i^{\frac{q-1}{2}} \bar{C}_{j_1 j_2 \cdots j_q} \bar{M}_{n_1 n_2 \cdots n_q} b^{j_1}_{n_1} \bar{\psi}^{j_2}_{n_2} \cdots \bar{\psi}^{j_q}_{n_q}}}_{\text{相互作用項 2}}$$

N=2 SUSY SYK MODEL

- 相互作用項２

$$\delta_{\bar{Q}} S_{\text{int}2} = i^{\frac{q-2}{2}} \bar{C}_{j_1 j_2 \cdots j_q} \bar{M}_{k n_2 \cdots n_q} \Delta_{k n_1} \bar{\psi}^{j_1}_{n_1} \bar{\psi}^{j_2}_{n_2} \cdots \bar{\psi}^{j_q}_{n_q}$$

$$\boxed{\sum_{\{n_i\}\text{の対称置換}} \bar{M}_{k n_2 \cdots n_q} \Delta_{k n_1} = 0}$$ ととれば $\delta_{\bar{Q}} S_{\text{int}2} = 0$

相互作用項１

$$S = \underbrace{\boxed{\bar{\psi}^i_n \Delta_{nm} \psi^i_m - \bar{b}^i_n b^i_n}}_{\text{運動項}} + \boxed{i^{\frac{q-1}{2}} C_{j_1 j_2 \cdots j_q} M_{n_1 n_2 \cdots n_q} \bar{b}^{j_1}_{n_1} \psi^{j_2}_{n_2} \cdots \psi^{j_q}_{n_q}}$$
$$+ \boxed{i^{\frac{q-1}{2}} \bar{C}_{j_1 j_2 \cdots j_q} \bar{M}_{n_1 n_2 \cdots n_q} b^{j_1}_{n_1} \bar{\psi}^{j_2}_{n_2} \cdots \bar{\psi}^{j_q}_{n_q}}$$

相互作用項２

N=2 SUSY SYK MODEL

$$\boxed{\Delta_{nm} + \Delta_{mn} = 0}$$

対称差分

$$\boxed{M_{\overbrace{n_1 n_2 \cdots n_q}^{\text{完全対称}}}}$$

例えば同一点の積

$$\boxed{\sum_{\{n_i\}\text{の対称置換}} \bar{M}_{kn_2\cdots n_q}\Delta_{kn_1} = 0}$$

Cyclic Leibniz Rule

N=2 SUSY SYK MODEL

- Sign problem

  $M^* \neq \bar{M}$ つまり S はエルミートでない

  差は $O(a)$ 以上
  連続極限では解消するはず

SUMMARY

SUMMARY

- CLRを用いて Nilpotent SUSY を実現
- N=2 model

  1 nilpotent SUSYを実現

  運動項と各相互作用項は独立に不変

  Localization 適用可能
- N=4 model

  2 nilpotent SUSYを実現

  Non-renormalization theorem 成立

  一般にもNilpotent SUSY があれば十分？

SUMMARY

- N=2 SUSY SYK model

    1 nilpotent SUSYを実現

    （たちの良い？）Sign problem

DISCUSSION

- N=2 quantum mechanics の数値解析

Kadoh-Kamei-So (PTEP 2019)

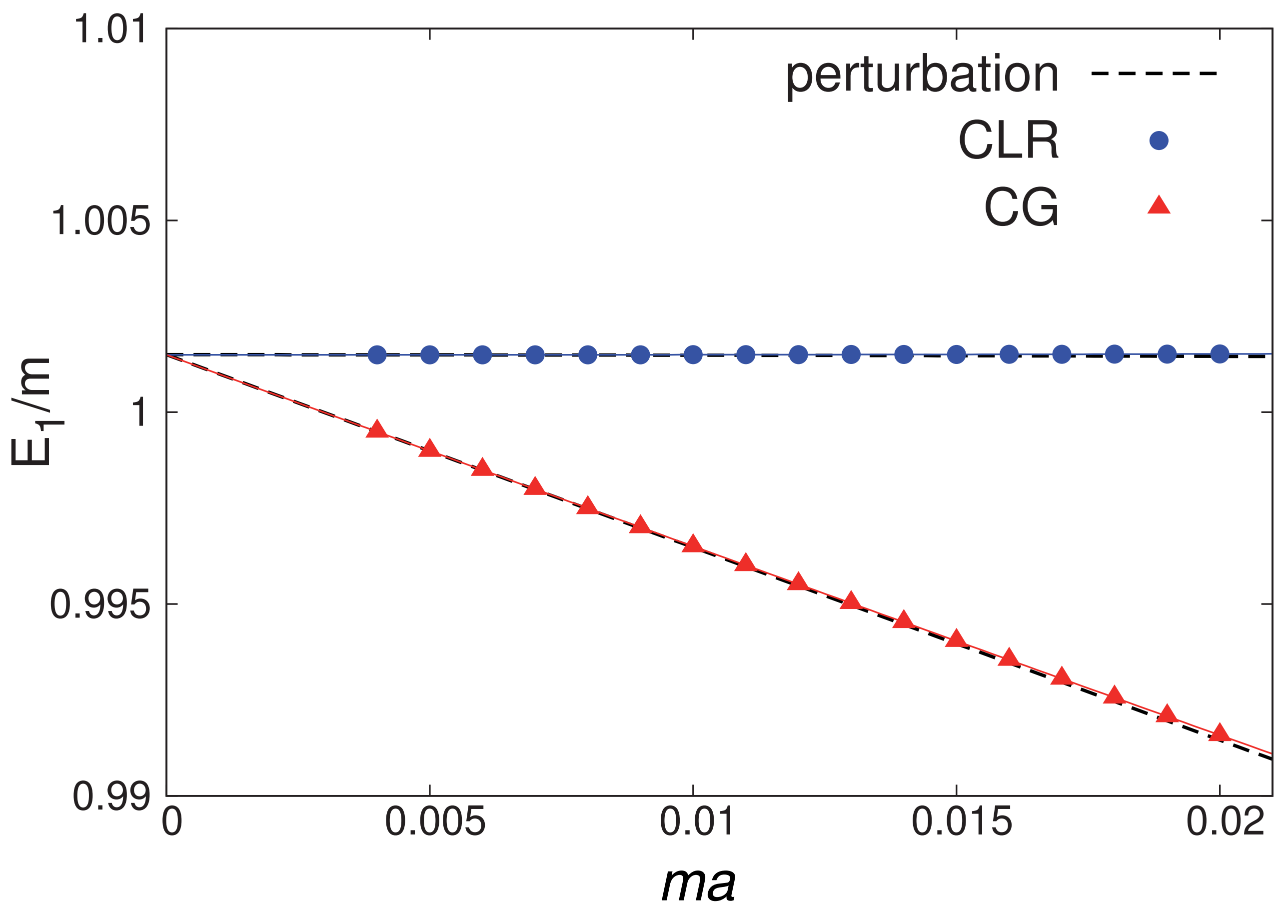
Catterall-Gregory model との比較

所謂 "表面項" 付き定式化

Transfer matrix の方法を用いて、

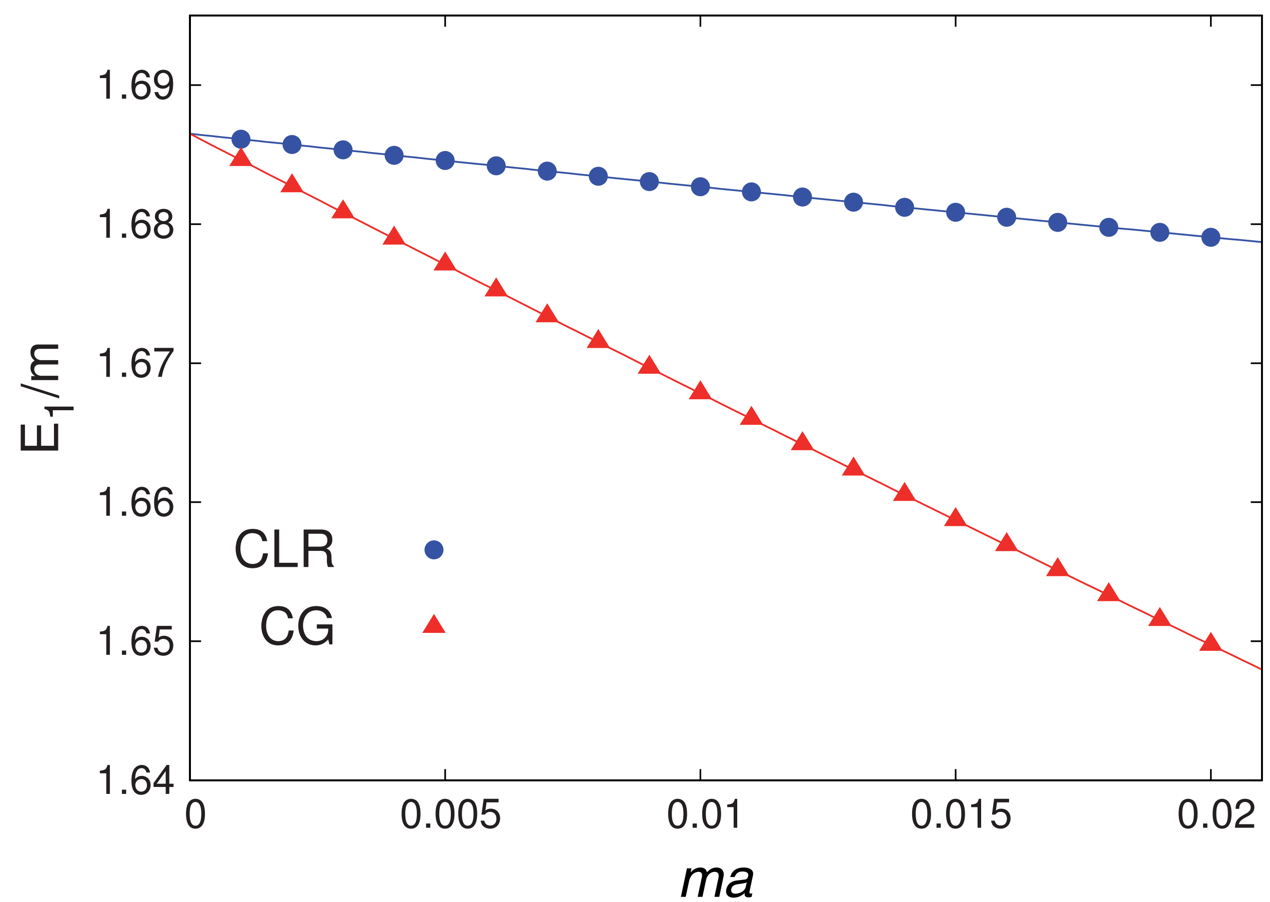
Energy spectrum を求めた

$$W(\phi) = m\phi + \lambda m^2 \phi^3$$



$\lambda = 1$

$\lambda = 0.001$



DISCUSSION

- CLRを用いた作用は、improved action？
- CLRの２次元以上への拡張？
- Nilpotent SUSY で十分？

THANK YOU