

テンソル模型に関連する（新しい）タイプの 行列模型の解析的数値的研究

笹倉 直樹

京都大学・基礎物理学研究所

Shingo Takeuchi氏との共同研究

arXiv:1907.06137 [hep-th]

§ 導入

重力の量子化は理論物理の最大の課題の一つ

- 一般相対論は摂動論的量子化が困難

力学変数である計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ が連続無限に存在

量子場の理論の摂動論的繰り込み処方 → 繰り込み不可能な紫外発散

- 古典的な連続時空概念からの脱却

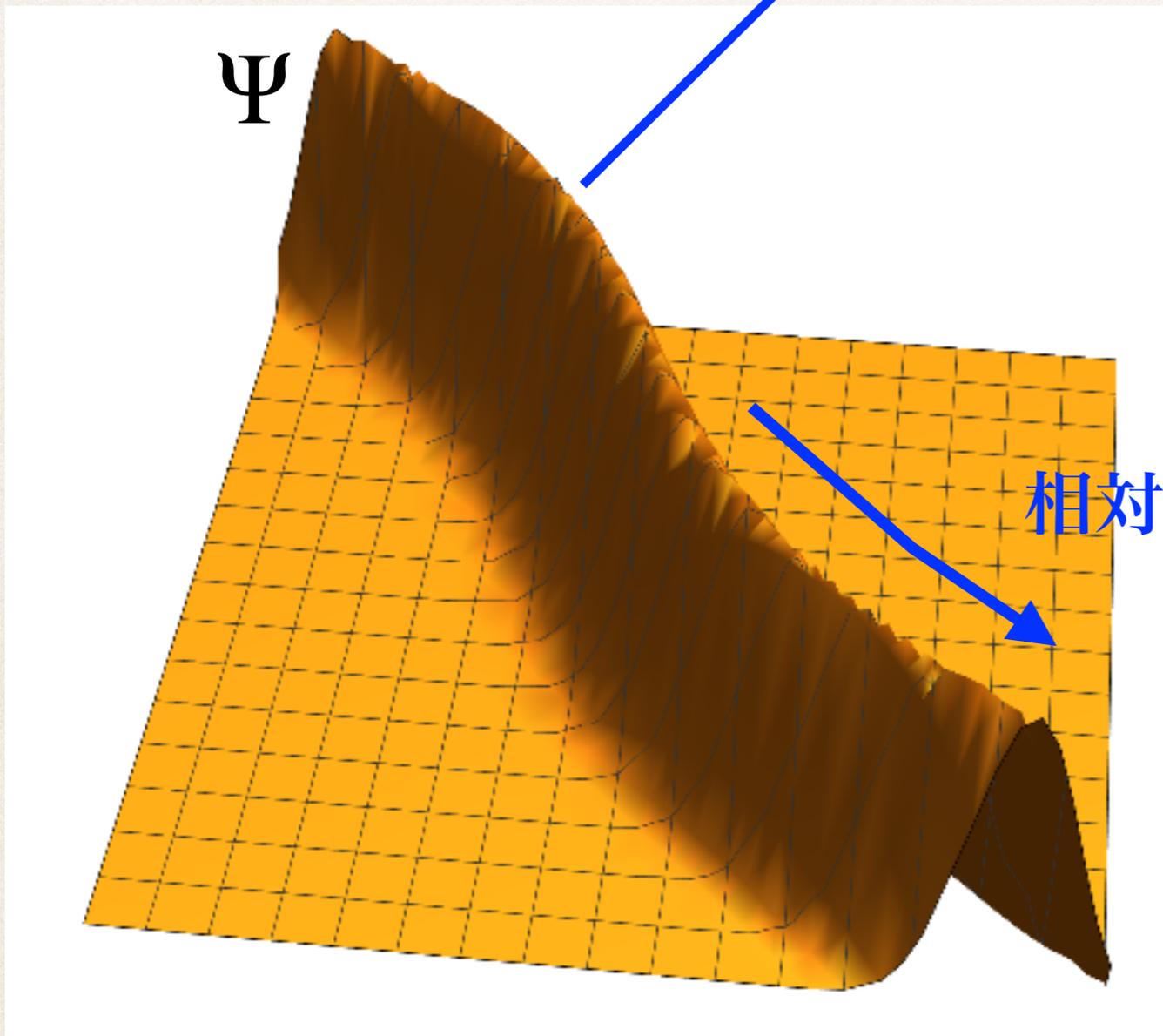
新しい力学変数 (時空や $g_{\mu\nu}(x)$ を最初に導入しない)

時空間は創発される概念 (Emergent spacetime)

様々な提案がある。

波動関数を調べれば、それぞれの理論の正当性がチェックできるだろう。

古典的時空間と見なせるか？

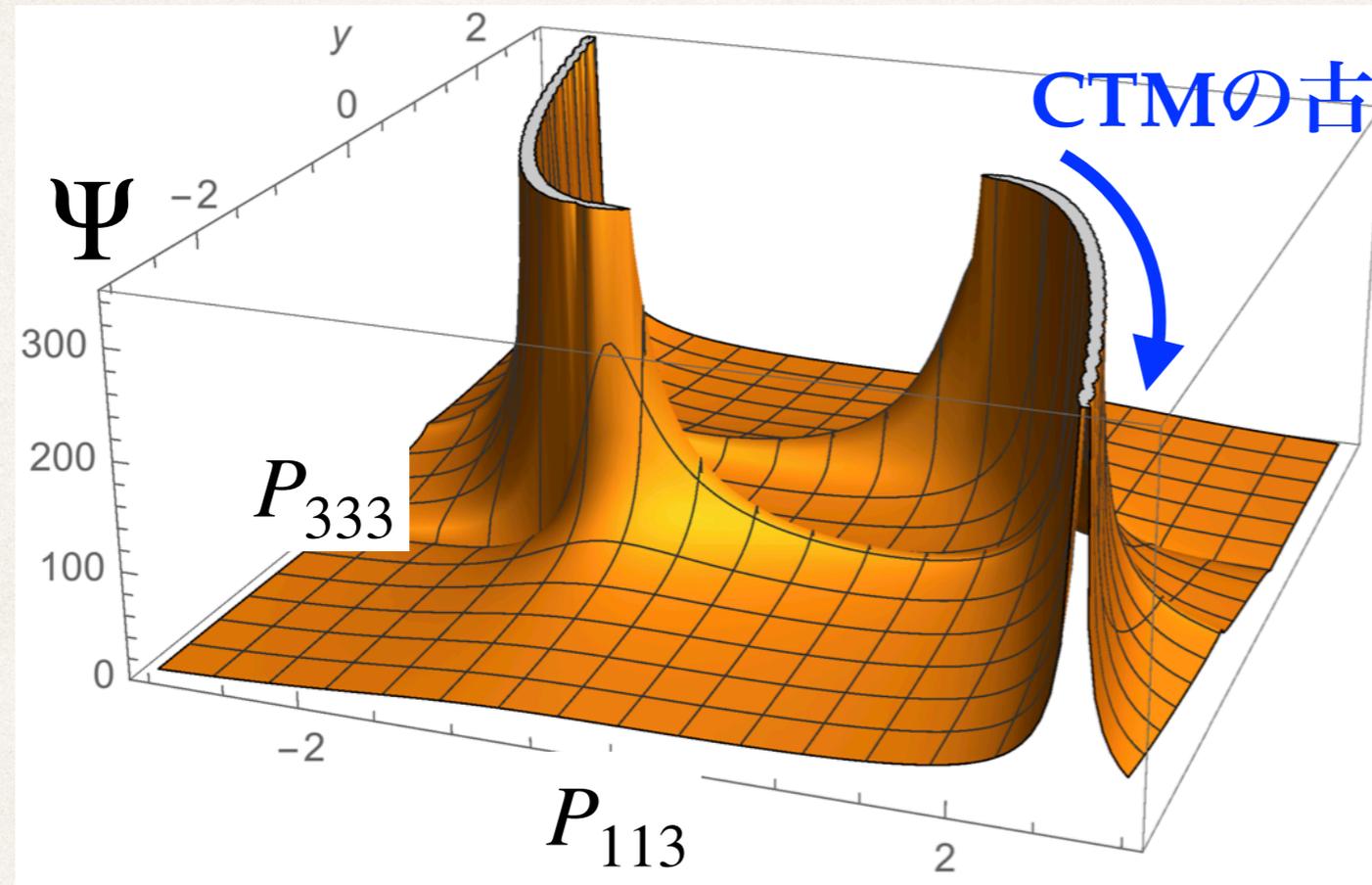


相対論の運動方程式に従うか？

正準形式のテンソル模型(CTM)の波動関数は鋭いピークを持つ

Obster, NS, arXiv:1710.07449

$N = 3$ の例



CTMの古典運動方程式に従う。

この例では
 $H = SO(2,1)$

リー群の対称性を持つ配位（テンソルの値）においてピークとなる。

$$h_a^{a'} h_b^{b'} h_c^{c'} \bar{P}_{a'b'c'} = \bar{P}_{abc}, \quad h \in H : \text{リー群の表現}$$

時空とリー群とは密接な関係があり、emergent spacetimeと関係ありそう。

無数のリー群の可能性がありピークの構造は N の増加に従い複雑になる。

- CTMの古典的運動方程式は、形式的連続極限 ($N \rightarrow \infty$) において、一般相対論のあるHamilton-Jacobi方程式と一致する。

Chen, Sato, NS, arXiv:1609.01946

- 距離計量を持つ時空 $\leftrightarrow P_{abc}$ Kawano, Obster, NS, arXiv:1805.04800

しかし、波動関数 $\Psi(P_{abc})$ のlandscapeは複雑であり、 $N \rightarrow \infty$ がどのようなものか分かっていない。

- $\Psi(P_{abc})$ は綺麗な形 (Airy関数の一般化) をしているが、その解析は容易ではない。
- $\Psi(P_{abc})$ の配位空間の次元は $O(N^3)$ であり、配位空間全体を調べることは現実的に困難。

以下の2つの簡単化を行って調べる

- 波動関数自体の簡単化

波動関数の表式内の積分変数のうちの一つを固定する。

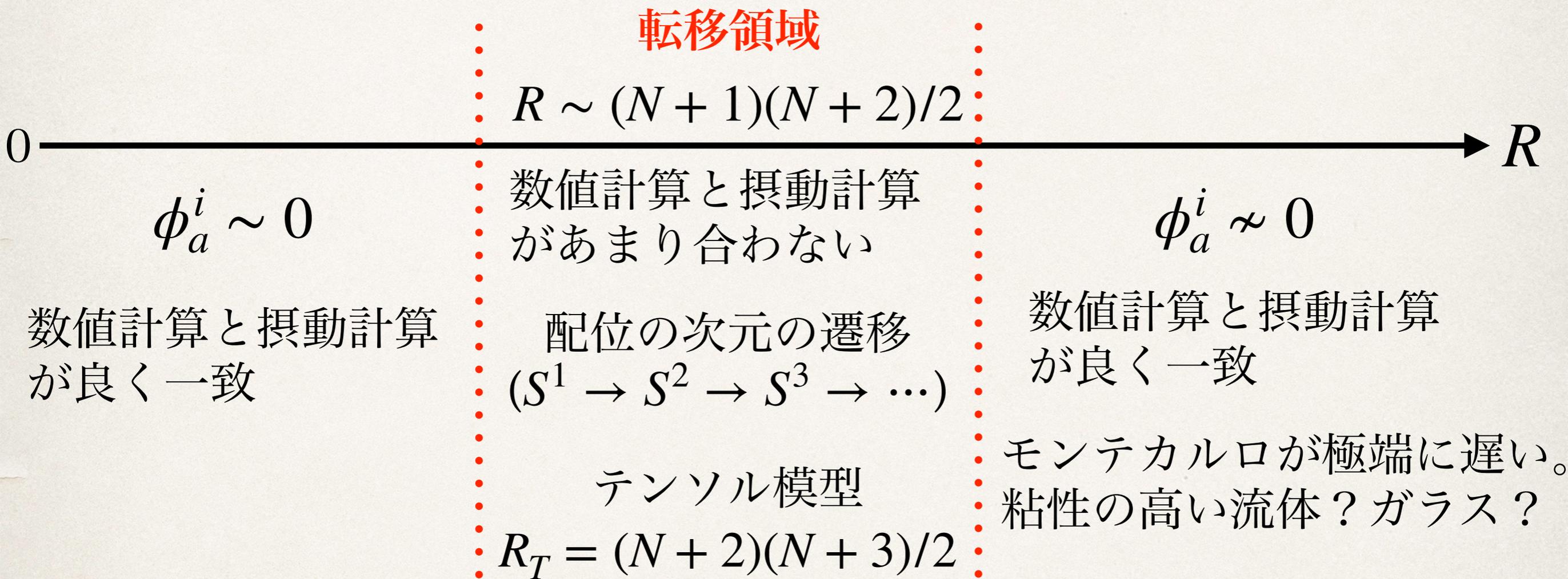
- 対称性とピークの関係は保たれる。(ただし、対称性は正定値(ユークリッド)のものになる。) Obster, NS, arXiv:1704.02113

- 更に波動関数を配位(P_{abc})について積分する → **ある行列模型**

Lionni, NS, arXiv:1903.05944

結果の概要

この行列模型に対して、メトロポリス法によるモンテカルロ計算と、摂動論による解析的計算を行った。



- 転位が相転移かcrossoverかは現在のところ不明
- 更にParallel Tempering+Hybrid Monte Carloで計算中

§ 正準形式によるテンソル模型

NS, arXiv:1111.2790, 1203.0421

力学変数 — 正準共役な 3 階実対称テンソル

$$\{Q_{abc}, P_{def}\} = \sum_{\sigma} \delta_{a\sigma_d} \delta_{b\sigma_e} \delta_{c\sigma_f} \quad a, b, \dots = 1, 2, \dots, N$$

$$\{Q_{abc}, Q_{def}\} = \{P_{abc}, P_{def}\} = 0$$

第1種拘束系として定式化 (一般相対論のADM形式とのアナロジー)

$$H = n_a \mathcal{H}_a + n_{ab} \mathcal{I}_{ab}$$

$\mathcal{H}_a \sim$ Hamiltonian constraints

$n_a \sim$ Lapse

$\mathcal{I}_{ab} \sim$ Momentum constraints

$n_{ab} \sim$ Shift

- 拘束条件

$$\mathcal{H}_a = \frac{1}{2} (P_{abc} P_{bde} Q_{cde} - \lambda Q_{abb}) \quad \lambda = 0, \pm 1$$

$$\mathcal{I}_{ab} = -\mathcal{I}_{ba} = \frac{1}{4} (P_{acd} Q_{bcd} - P_{bcd} Q_{acd}) \quad \text{SO(N)生成子}$$

- 拘束系代数 (Dirac algebra)

$$\{\mathcal{H}(n^1), \mathcal{H}(n^2)\} = \mathcal{I}([\tilde{n}^1, \tilde{n}^2] + 2\lambda n^1 \wedge n^2)$$

$$\{\mathcal{I}(m), \mathcal{H}(n)\} = \mathcal{H}(mn)$$

$$\{\mathcal{I}(m^1), \mathcal{I}(m^2)\} = \mathcal{I}([m^1, m^2])$$

$$\mathcal{H}(n) = \mathcal{H}_a n_a \quad \tilde{n}_{ab} = P_{abc} n_c \quad \text{: 非線形性}$$

$$\mathcal{I}(m) = \mathcal{I}_{ab} m_{ab} \quad (n^1 \wedge n^2)_{ab} = n_a^1 n_b^2 - n_b^1 n_a^2$$

ADM形式の拘束系代数と酷似 — 形式的連続極限で一致

Sato, NS, arXiv:1506.04872

構造の唯一性 NS, arXiv:1203.0421

- 量子化はstraightforward

$$Q_{abc}, P_{abc} \rightarrow \hat{Q}_{abc}, \hat{P}_{abc}$$

$$[\hat{Q}_{abc}, \hat{P}_{def}] = i \sum_{\sigma} \delta_{a\sigma_d} \delta_{b\sigma_e} \delta_{c\sigma_f}$$

$$[\hat{Q}_{abc}, \hat{Q}_{def}] = [\hat{P}_{abc}, \hat{P}_{def}] = 0$$

Hamiltonian constraintsは初項のnormal orderingからの補正がある。

補正は $\hat{\mathcal{H}}_a$ のエルミート性から唯一に決まる。

$$\hat{\mathcal{H}}_a = \frac{1}{2} \left(\hat{P}_{abc} \hat{P}_{bde} \hat{Q}_{cde} - \lambda \hat{Q}_{abb} + \underline{i \lambda_H \hat{P}_{abb}} \right)$$

$$\lambda_H = (N+2)(N+3)/2$$

$$\hat{\mathcal{J}}_{ab} = \text{古典と同一}$$

Constraint algebraは変更されない。単に、 $\{\cdot, \cdot\} \rightarrow \frac{1}{i} [\cdot, \cdot]$ となる。

- 物理的状态 $\hat{\mathcal{H}}_a |\Psi\rangle = \hat{\mathcal{J}}_{ab} |\Psi\rangle = 0$

R_T は normal ordering の項により特定のレプリカ数 R

- 厳密解

$$\Psi(P_{abc}) = \varphi(P_{abc})^{R_T/2} \quad R_T = \lambda_H = (N+2)(N+3)/2$$

$$\varphi(P_{abc}) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} d\tilde{\phi} d\phi e^{i(P_{abc}\phi_a\phi_b\phi_c - \phi^2\tilde{\phi} + 4\tilde{\phi}^3/27\lambda)}$$

$$d\phi := \prod_{a=1}^N d\phi_a \quad \phi^2 := \phi_a\phi_a$$

- Airy関数の多変数化。 - 解の一般性などは不明。

定性的な性質として、リー群不変な配位においてピークを持つ。

Obster, NS, arXiv:1704.02113, 1710.07449

Coherenceにより定性的に説明される：

$$\varphi(P_{abc}) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} d\tilde{\phi} d\phi e^{i(P_{abc}\phi_a\phi_b\phi_c - \phi^2\tilde{\phi} + 4\tilde{\phi}^3/27\lambda)}$$

\downarrow

$$\bar{P}_{abc}\bar{\phi}_a\bar{\phi}_b\bar{\phi}_c \quad \bar{\phi} = (\phi_a, \tilde{\phi})$$

$h_a^{a'}h_b^{b'}h_c^{c'}\bar{P}_{a'b'c'} = \bar{P}_{abc}$, $h \in H$ だとすると、gauge orbit $h_a^{a'}\bar{\phi}_{a'}$ に沿って積分がcoherentに効いて $\varphi(P_{abc})$ は大きな値をとる。逆に、それ以外の \bar{P}_{abc} では、decoherenceにより打ち消しあって値は小さくなる。

H がリー群の実表現であるという要請以外、リー群としては無数の可能性がある。ただし、実際にピークになるかどうかはケースバイケースである。特に $SO(p,1)$ などは物理的に意味がありそう。

ピークの構造を具体的にみることができるのは N が小さい時ぐらい。

$N \rightarrow \infty$ でどうなるかななどの波動関数の性質はよくわかっていない。

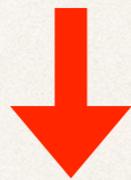
Emergent Spacetime の立場からはリー群の対称性とピークの関係は本質的に大事と思われる。

以下のような簡単化 ($\tilde{\phi}$ を固定) を行っても、この性質は保たれる。

ただしリー群の対称性としては一般に正定値のものとなる。

$$\varphi(P_{abc}) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} d\tilde{\phi} d\phi e^{i(P_{abc}\phi_a\phi_b\phi_c - \phi^2\tilde{\phi} + 4\tilde{\phi}^3/27\lambda)}$$

波動関数の簡単化



今後はこれのみを議論する

$$\bar{\varphi}(P_{abc}) = \int_{\mathbb{R}^N} d\phi e^{iP_{abc}\phi_a\phi_b\phi_c - k\phi^2} \quad k > 0$$

また、 P_{abc} の配位空間は次元が高すぎて $\Psi(P_{abc})$ の性質を調べるには不便。

さらに、簡単化のため P_{abc} について積分する。

$$dp = \prod_{a \leq b \leq c=1}^N dP_{abc}$$

$$P^2 = P_{abc} P_{abc}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dP e^{-\frac{1}{4\lambda} P^2} \Psi(P)^2 \quad (\lambda > 0)$$

確率解釈

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dP e^{-\frac{1}{4\lambda} P^2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} d\phi e^{iP_{abc} \phi_a \phi_b \phi_c - k \phi^2} \right)^R$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dP \prod_{a,j=1}^{N,R} d\phi_a^j e^{-\frac{1}{4\lambda} P^2 + \sum_{j=1}^{R,T} i P_{abc} \phi_a^j \phi_b^j \phi_c^j - k \phi_a^j \phi_a^j}$$

ベキをレプリカで表す

$$= Z_{N,R}(\lambda, k) \quad : \phi_a^i \text{だけが自由度の行列模型}$$

P_{abc} のガウス積分

§ 行列模型

$$Z_{N,R}(\lambda, k) = \int_{\mathbb{R}^{NR}} d\phi e^{-\lambda U(\phi) - k \phi^2}$$

$$d\phi = \prod_{a,i=1}^{N,R} d\phi_a^i \quad U(\phi) = \sum_{i,j=1}^R (\phi_a^i \phi_a^j)^3 \geq 0 \quad \phi^2 = \sum_{i=1}^R \phi_a^i \phi_a^i$$

$U(\phi)$ で i, j の足が 3 重縮約されているので通常 of 行列対角化は実行できず ($O(N) \times S_R$ のもとで対称)、通常 of 行列模型として解けない。

ベクトル模型として Large N で解くことはある程度可能かもしれないが、 $R = R_T = (N+2)(N+3)/2$ の場合に興味があるので、よく分からない。

Nishigaki, Yoneya, Nucl. Phys. B 348, 787 (1991)

Di Vecchia, Kato and Ohta, Int. J. Mod. Phys. A 7, 1391 (1992)

実は同様な行列模型はスピングラスの研究で現れていた。

A. Crisanti, H.-J. Sommers, Z. Phys. B 87, 341 (1992).

Spherical p-spin model (p=3)

$$Z_{spin} = \int_{\phi_a \phi_a = 1} d\phi e^{P_{abc} \phi_a \phi_b \phi_c} \quad P_{abc} : \text{ランダム}$$

Spherical constraintがあることにより有限。

Replica trickにより同じような行列模型が得られる。


$$\langle \log Z_{spin} \rangle_{P_{abc}} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\langle (Z_{spin})^R \rangle_{P_{abc}} - 1}{R}$$

$$\langle (Z_{spin})^R \rangle_{P_{abc}} = \int dP e^{-\frac{1}{4\lambda} P^2} \left(Z_{spin} \right)^R$$

$$= \int_{\substack{\phi_a^i \phi_a^i = 1 \\ \text{each } i}} d\phi e^{\lambda \sum_{i,j=1}^R (\phi_a^i \phi_a^j)^3}$$

熱力学極限($N \rightarrow \infty$)で平均場などにより厳密に解けていると考えられており、ガラス転移などが見出されている。

テンソル模型からのものと形は同じであるが、かなり違っている。

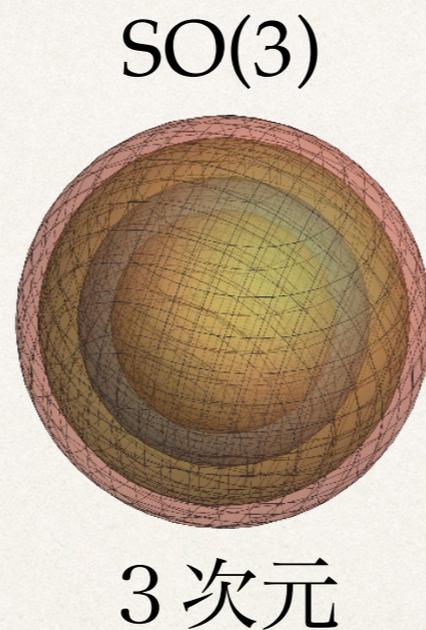
Spherical p-spin model	テンソル模型
Spherical constraints	Flat space
$R \rightarrow 0$	$R_T = (N + 2)(N + 3)/2$
相互作用項の符号が逆	

スピンガラスの結果をそのままでは使えないように思える。

この行列模型を解析テンソル模型の視点から再解析する。

- $R_T = (N + 2)(N + 3)/2$ で何かが起きるのか？
- 波動関数のピークが効くとすると、Gauge orbit に沿って ϕ_a^i が効いてくるはず。

$h_a^{a'} \phi_{a'}$:



§ 行列模型の解析

- 手法

メトロポリス法によるモンテカルロシミュレーション

摂動計算による解析的計算

- 見たもの

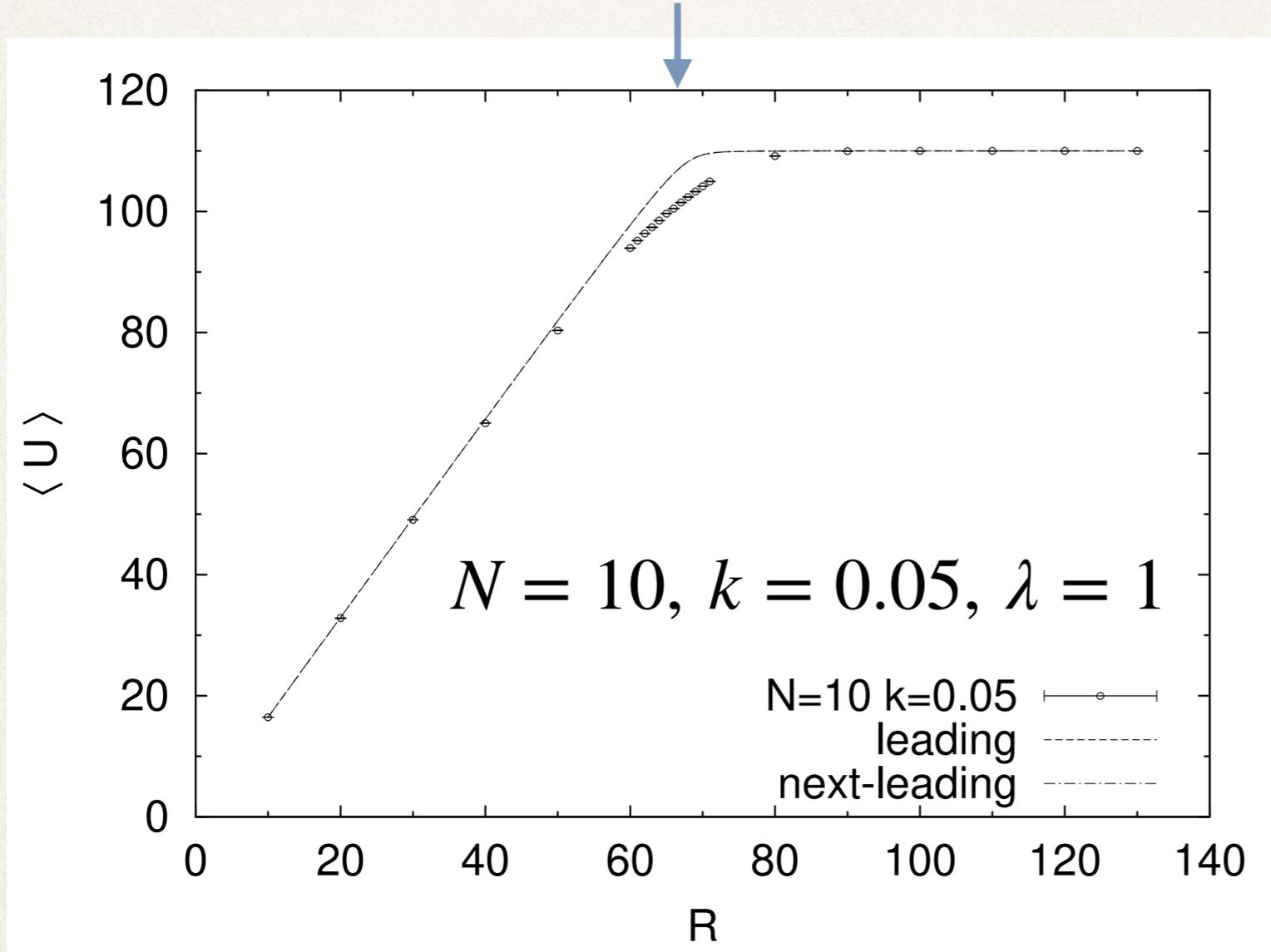
観測量の期待値の R 依存性

配位のトポロジー

§ 結果

- 観測量の期待値

$$R_c = (N + 1)(N + 2)/2 = 66 \text{ for } N = 10$$

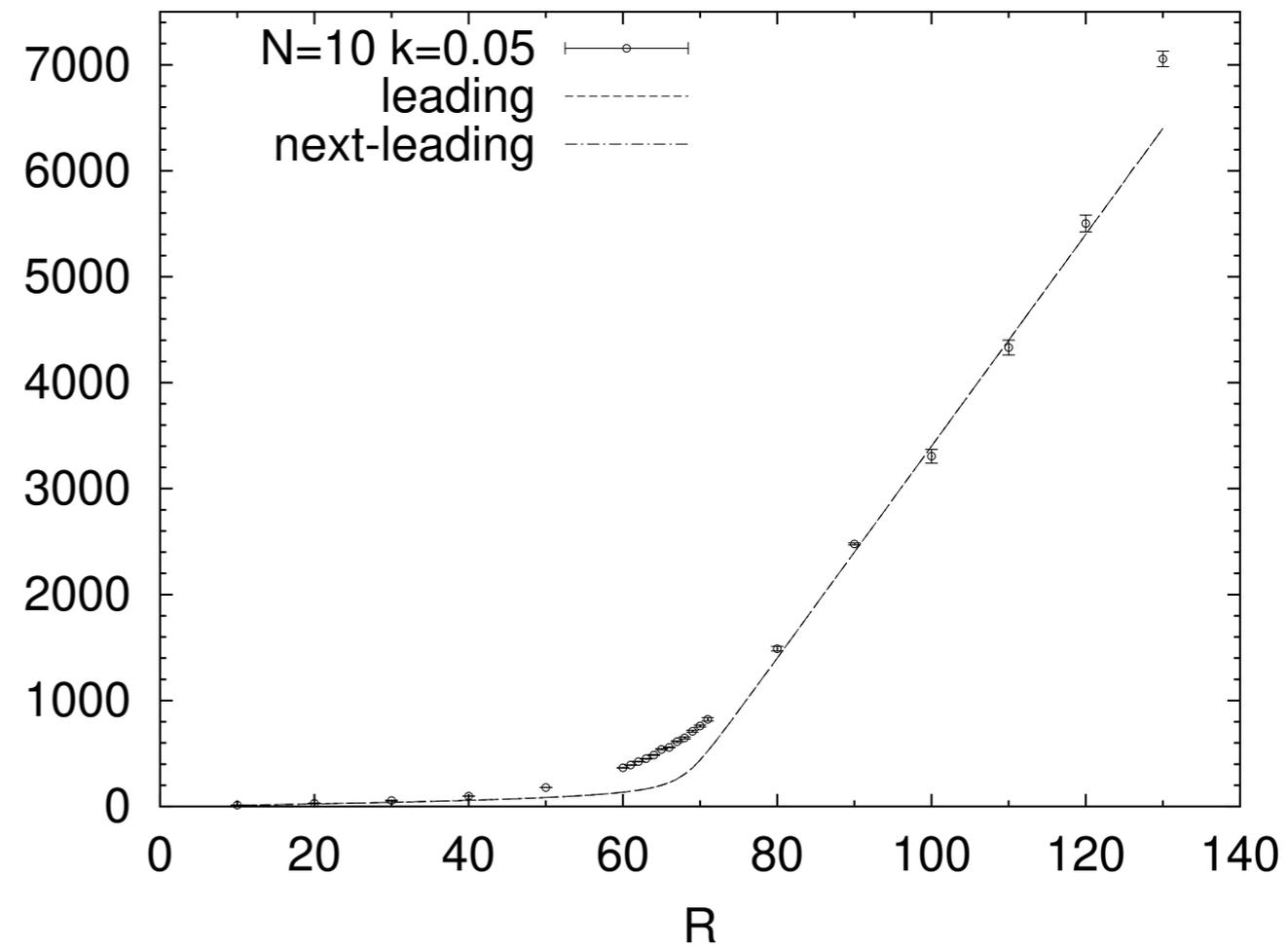
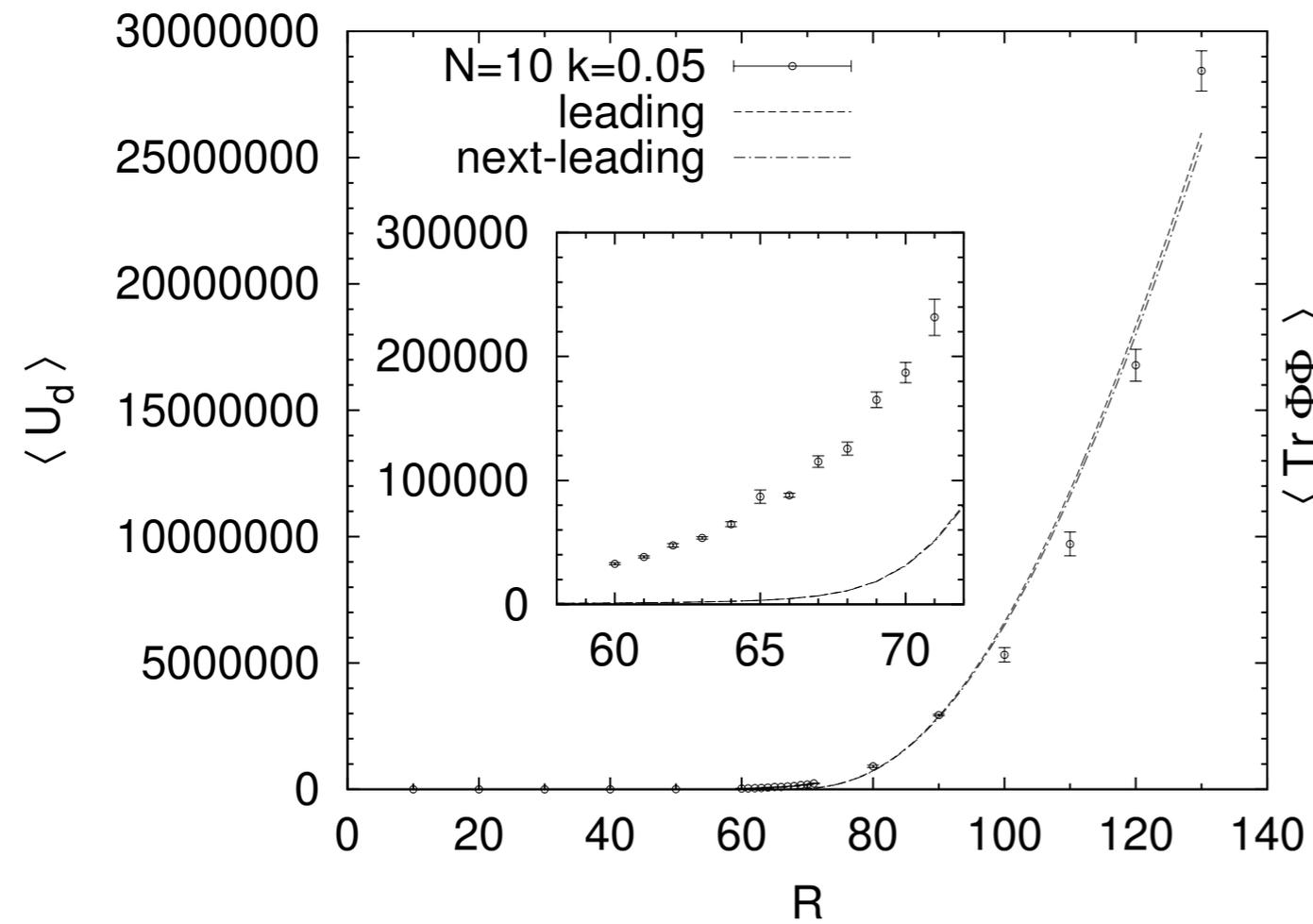


$$U := \sum_{i,j=1}^R (\phi_a^i \phi_a^j)^3$$

- $R \sim R_c = (N + 1)(N + 2)/2$ 近傍で転移現象が見られる。

- 転移領域の外側では、摂動計算と数値計算は良く一致する。

別の観測量についても同様



$$U_d := \sum_{i=1}^R (\phi_a^i \phi_a^i)^3$$

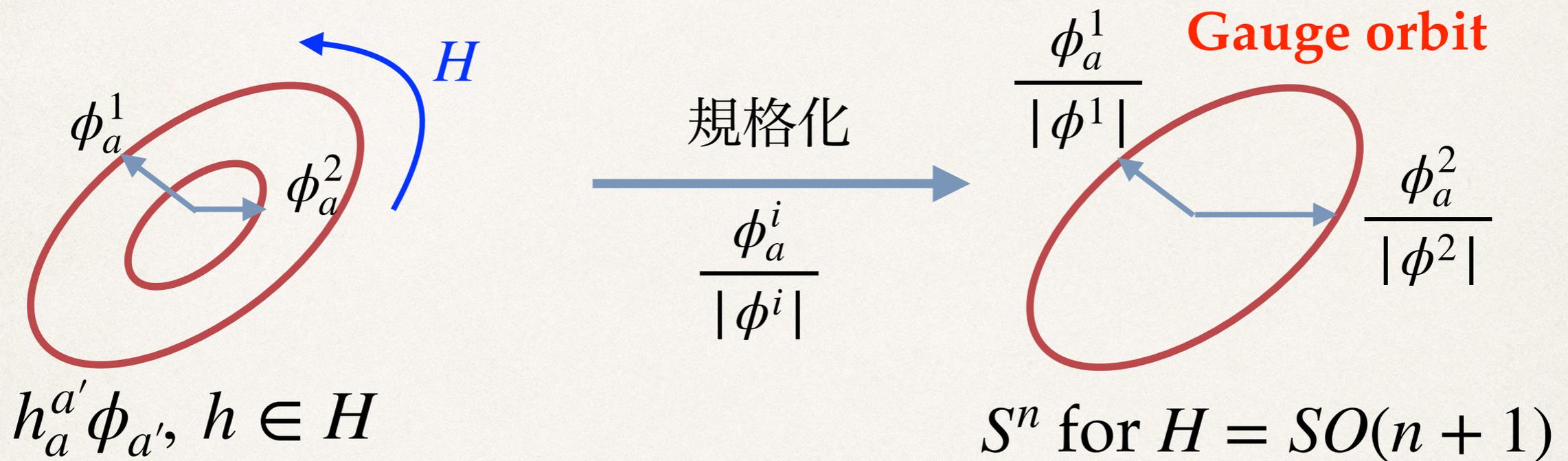
$$\text{Tr}(\phi^t \phi) := \sum_{i=1}^R \phi_a^i \phi_a^i$$

- 観測量の期待値についてのまとめ

- $R \sim R_c = (N + 1)(N + 2)/2$ 近傍で転移現象が見られる。
- R_c はテンソル模型の $R_T = (N + 2)(N + 3)/2$ に極めて近い。波動関数の積分変数を一つ固定しているのので、一致というべきかもしれない。
- 転移領域の外側では、摂動計算と数値計算は良く一致するが、転移領域では逆にズレがはっきり見えている。
- $R \gtrsim R_c$ かつ $k \lesssim 0.01$ のとき、モンテカルロ計算が非常に遅い。粘性の高い流体もしくはガラスなのかもしれない。
- 転移が相転移なのかcrossoverなのかは現時点ではなんとも言えない。

- 配位 ϕ_a^i のトポロジー

分配関数は波動関数の積分ともみなせ、そのピークが主に効くだろう。
 それぞれのピークの P_{abc} はリー群対称性を満たし、 $\phi_a^i (i = 1, 2, \dots, R)$ の積分はその gauge orbit に沿って効いてくると思われる。

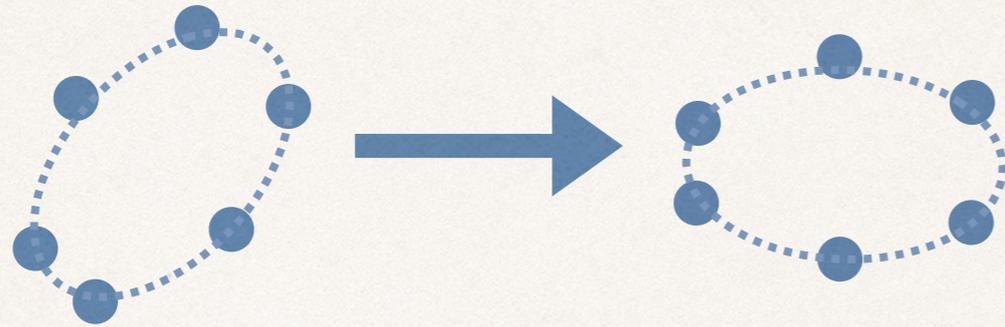


規格化したベクトル $\phi_a^i / |\phi^i| (i = 1, 2, \dots, R)$ のトポロジーを解析する。

注意事項：モンテカルロデータ全体では gauge orbit は N 次元空間内であらゆる向きをとるので、全て S^N になってしまう。一つ一つのモンテカルロデータの持つ配位のトポロジーを調べ統計的に処理する必要がある。

3つの独立した方法で調べた。(それぞれ良い点と悪い点がある)

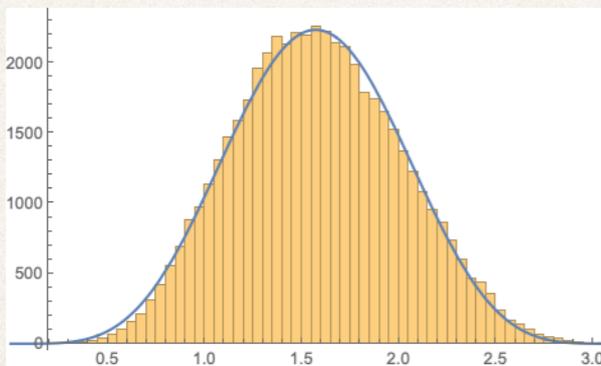
- $\frac{\phi_a^i}{|\phi^i|}$ に対する主成分解析を行いデータの向きを揃え図形を見る



😊 一目瞭然

😞 次元が低く出る傾向

- 角度分布 $\cos^{-1}(\phi_a^i \phi_a^j / |\phi^i| |\phi^j|)$ から次元を読み取る



$$\propto \sin^{d-1}(\theta)$$

😊 解析が容易

😞 間接的

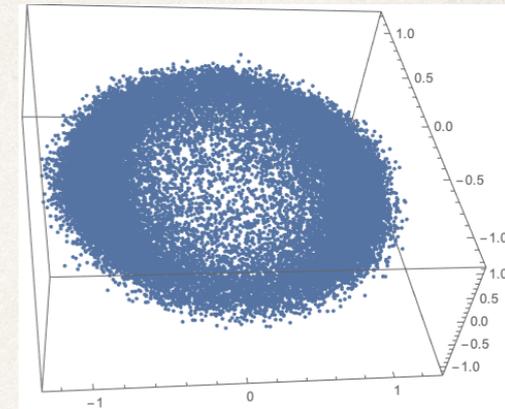
- データ解析の手法 (persistent homology) によりトポロジーを調べる

😊 直接的

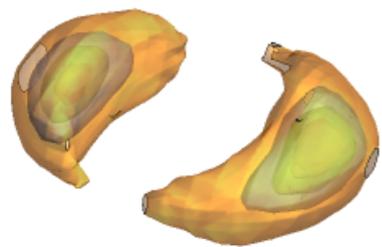
😞 データの揺らぎの影響を受けやすい

- 主成分解析による結果 $N = 4, k = 0.01, \lambda = 1$
($R_c = (N + 1)(N + 2)/2 = 15$)

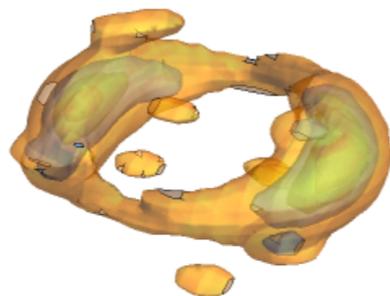
各モンテカルロデータ $\phi_a^i / |\phi^i|$ ($i = 1, 2, \dots, R$) に対して主成分解析を行い、3次元部分だけを取り出しプロットする。それを全てのモンテカルロデータについて重ね合わせる。



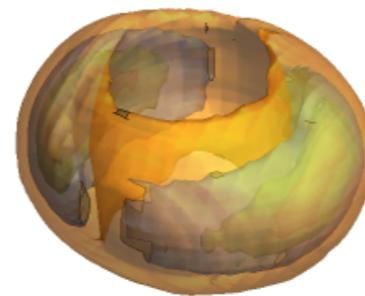
点だと見にくいので密度プロットをする。



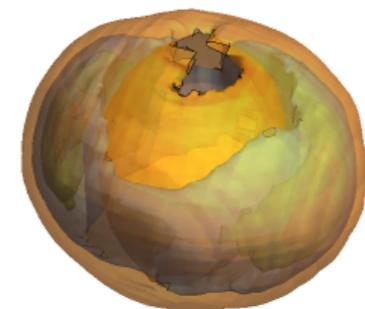
$R = 10$



$R = 15$



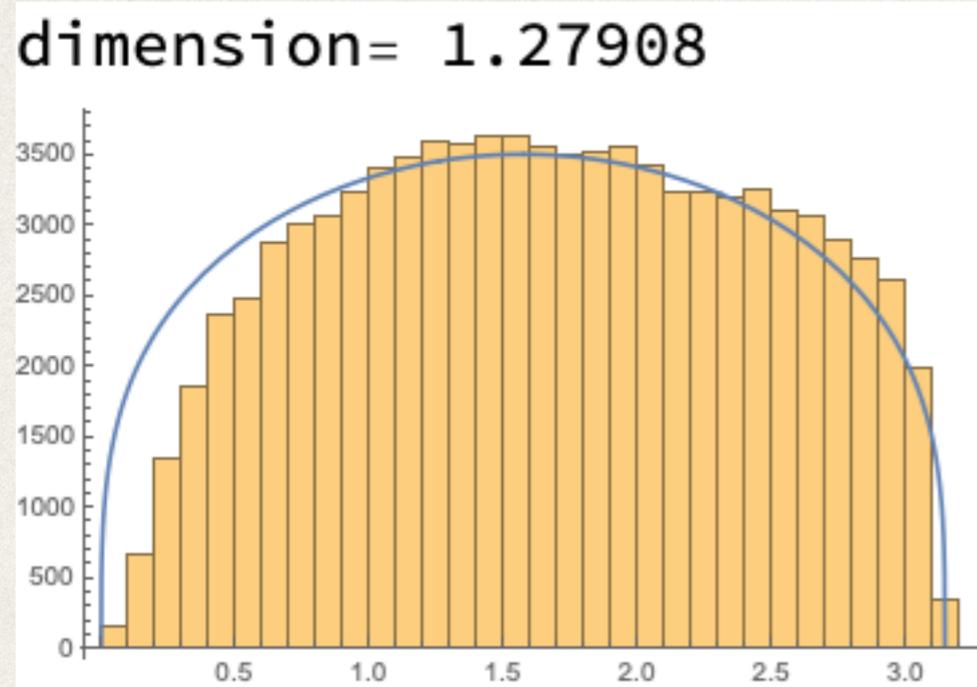
$R = 20$



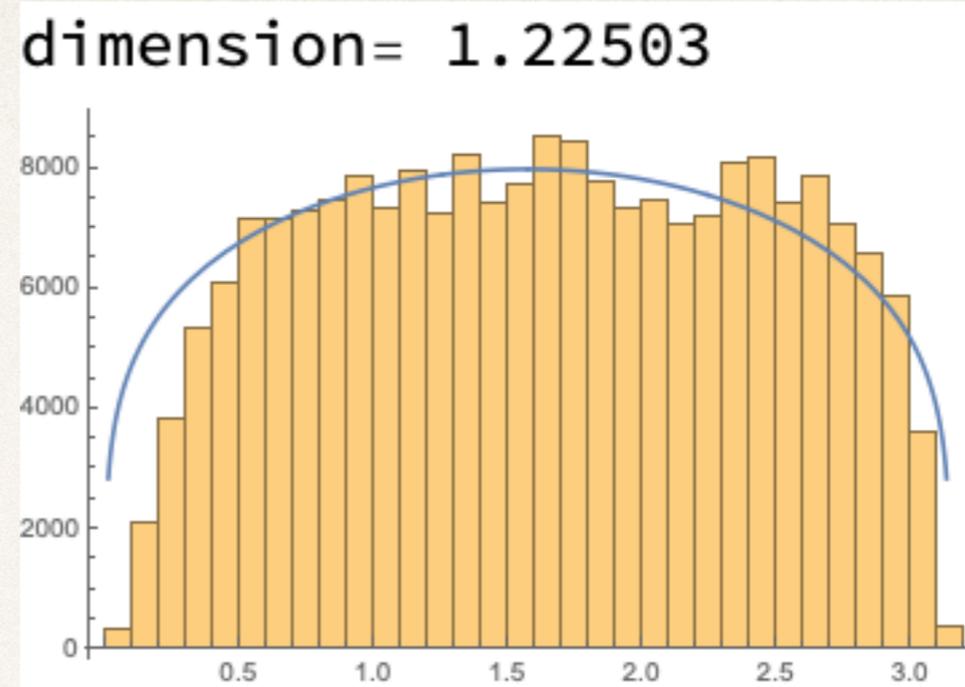
$R = 25$

$$S^0 \rightarrow S^1 \rightarrow S^2$$

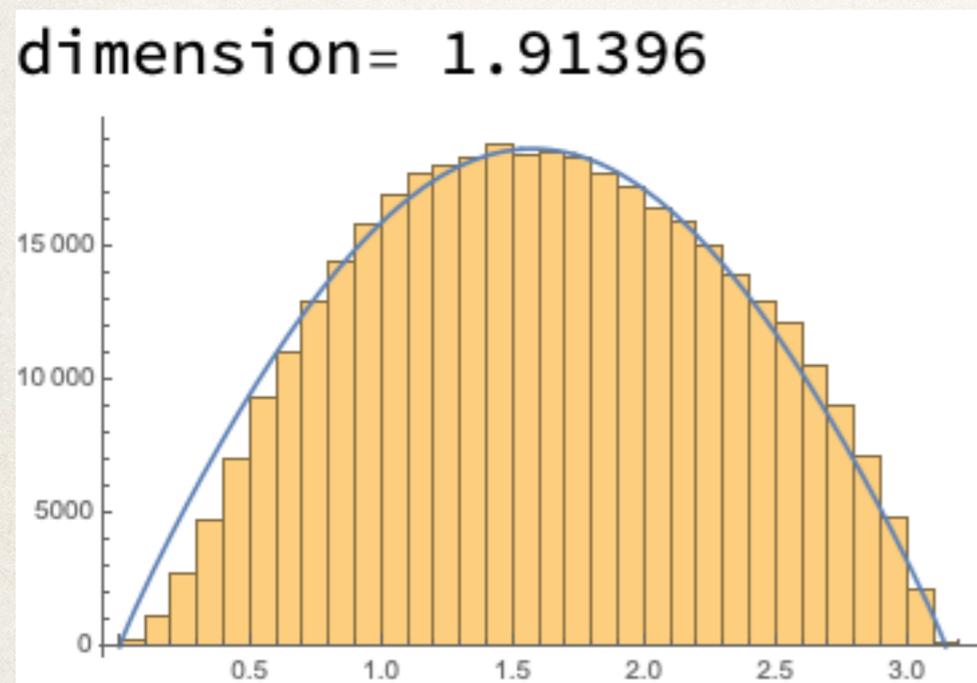
● 角度分布からの結果 $\propto \sin^{d-1}(\theta)$



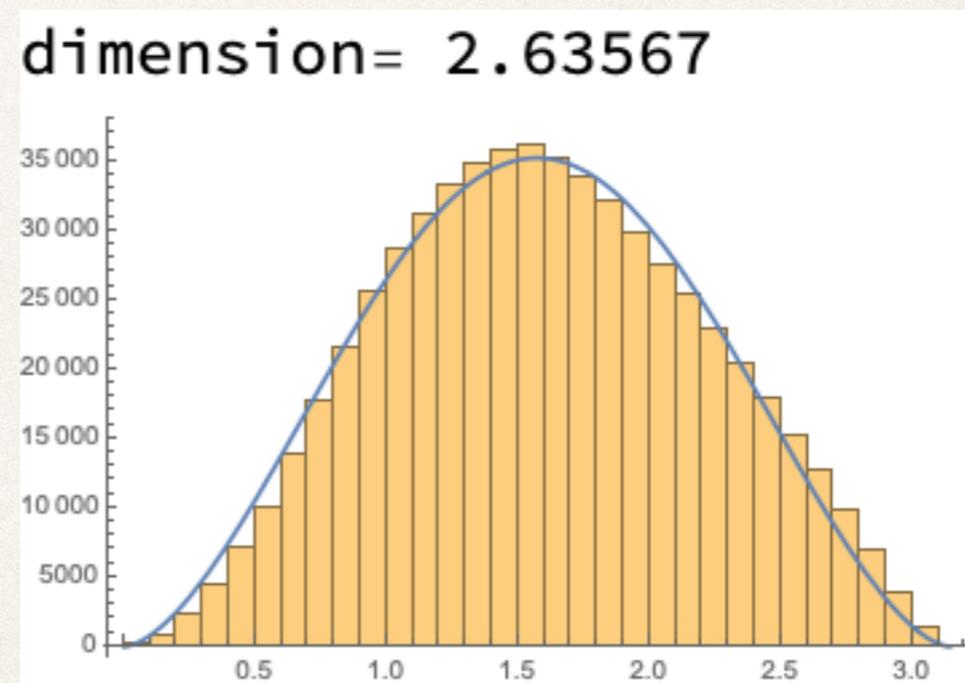
$R = 10$



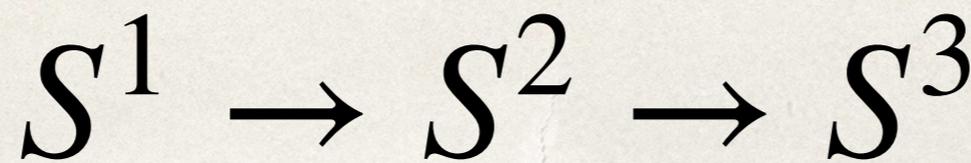
$R = 15$



$R = 20$



$R = 25$



- Persistent homology

Vietoris-Rips stream $VR(u)$

距離 u でparametrizeされた単体複体 $VR(u)$ を定義する

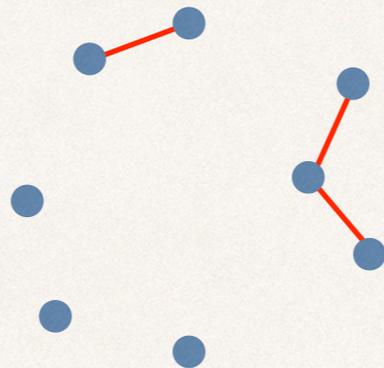
相互距離を持つ点
(入力データ)



$u = 0$

距離 $\leq u_1$ の点間をつなぐ

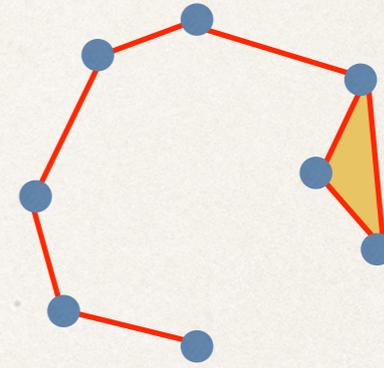
$0 < u_1$



$u = u_1$

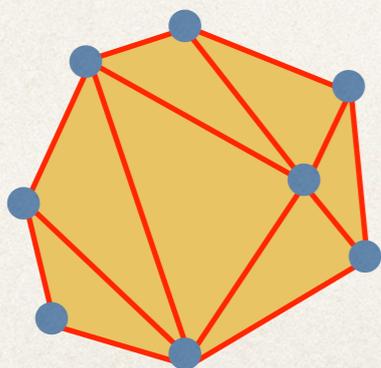
囲まれた部分が
単体なら含める

$u_1 < u_2$



$u = u_2$

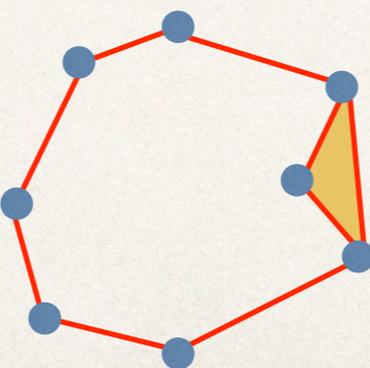
全て埋まり位相的にtrivial



$u = u_4$

cycleが生じたりする

$u_3 > u_2$

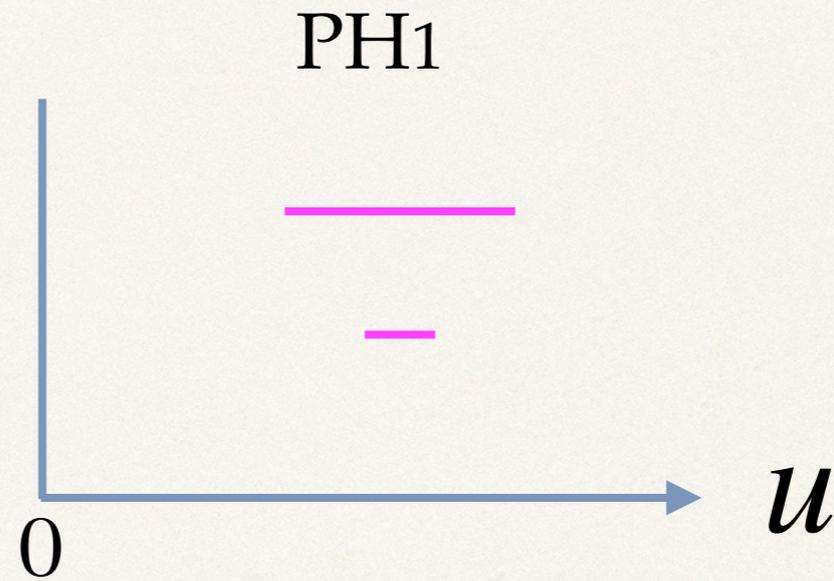
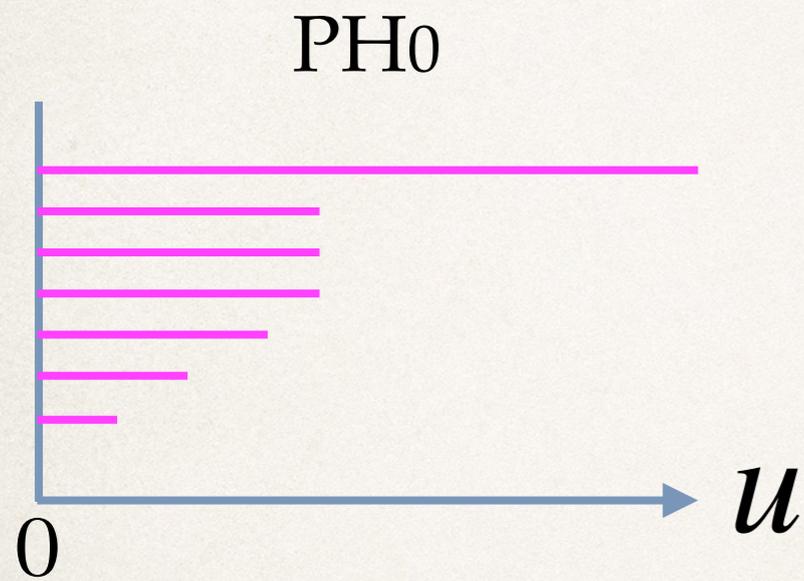


$u = u_3$

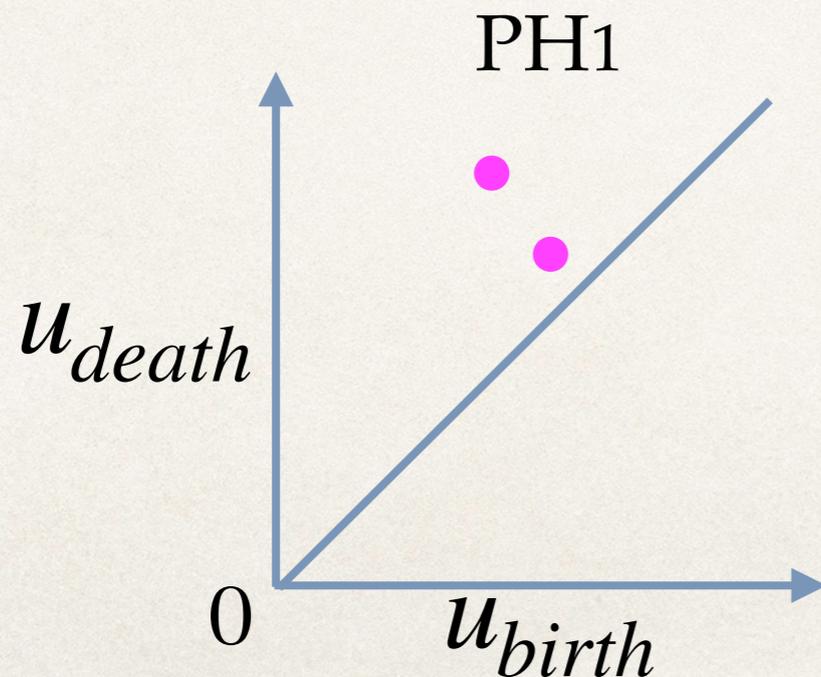
$u_4 > u_3$

各 u における単体複体 $VR(u)$ のホモロジー群を求めることにより、データの持つトポロジーを理解することができる。

- バーコード図 ホモロジー元の生成から消滅までを線分として書く



- パーシステント図



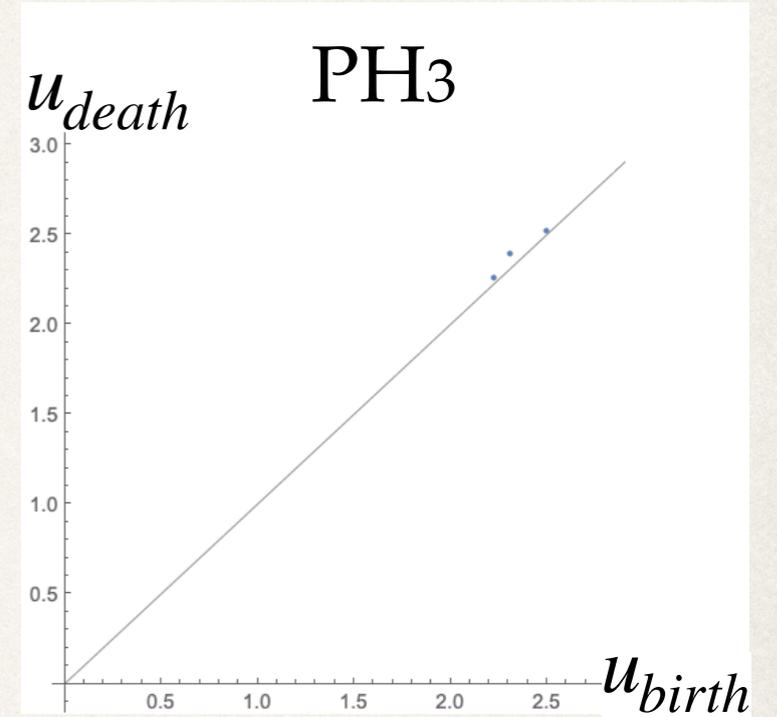
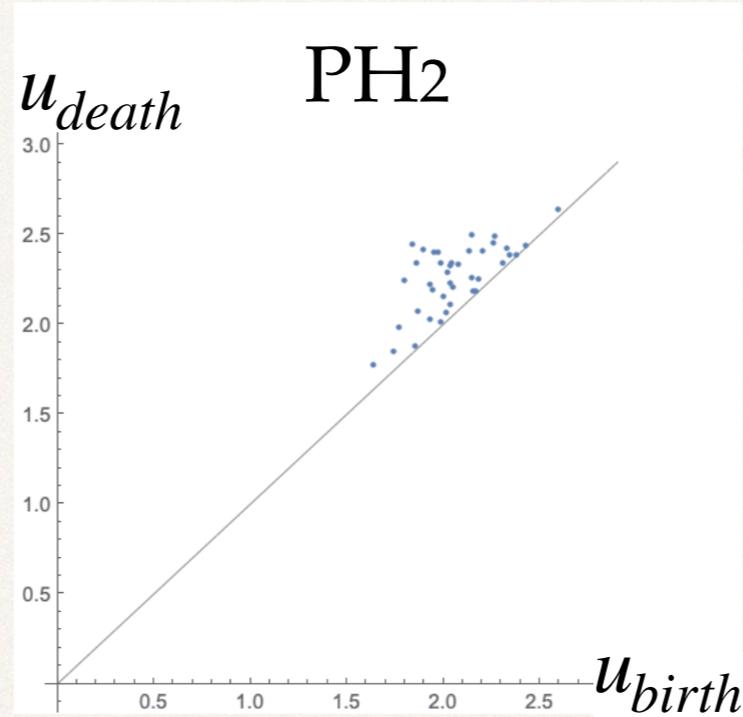
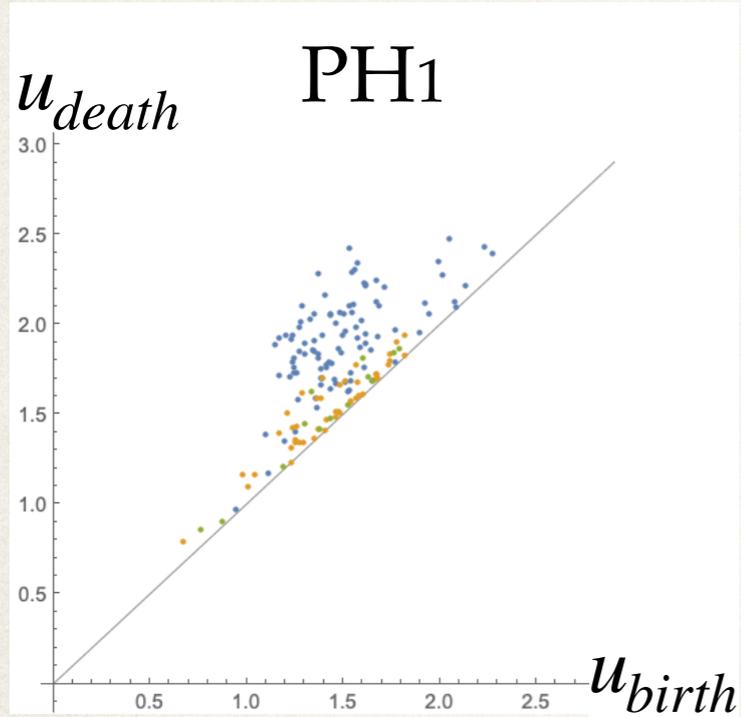
ホモロジー元それぞれに対して座標 (u_{birth}, u_{death}) のところに点をプロットする。

複数のデータを容易に重ねることができる。

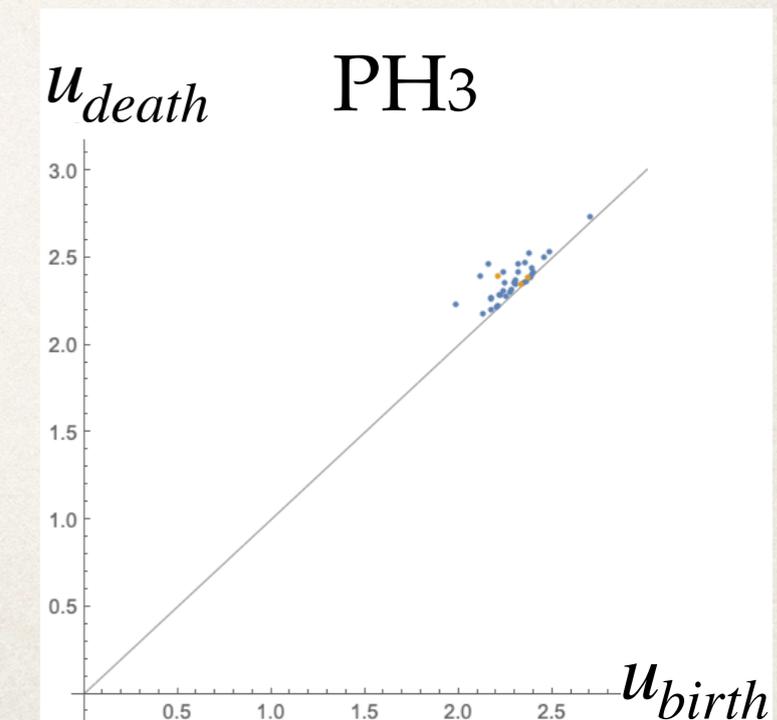
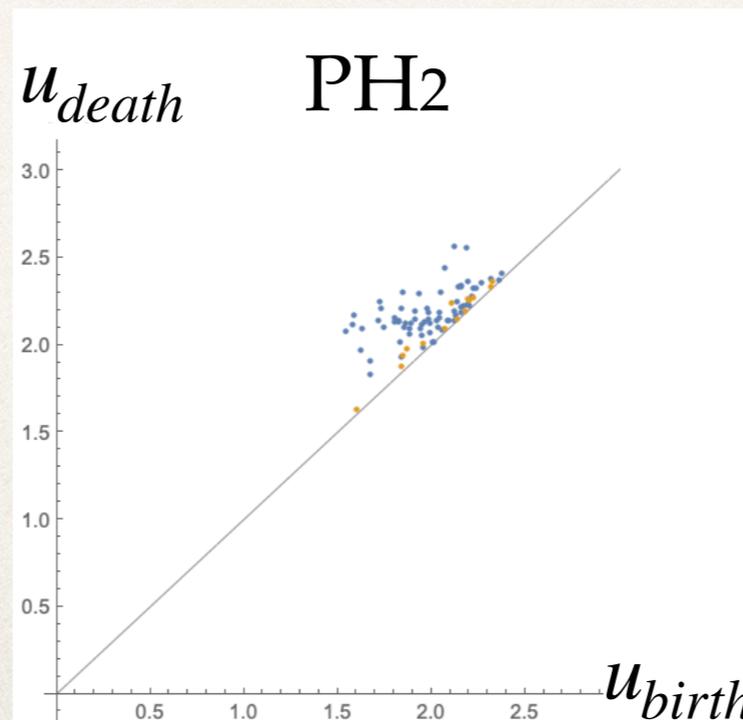
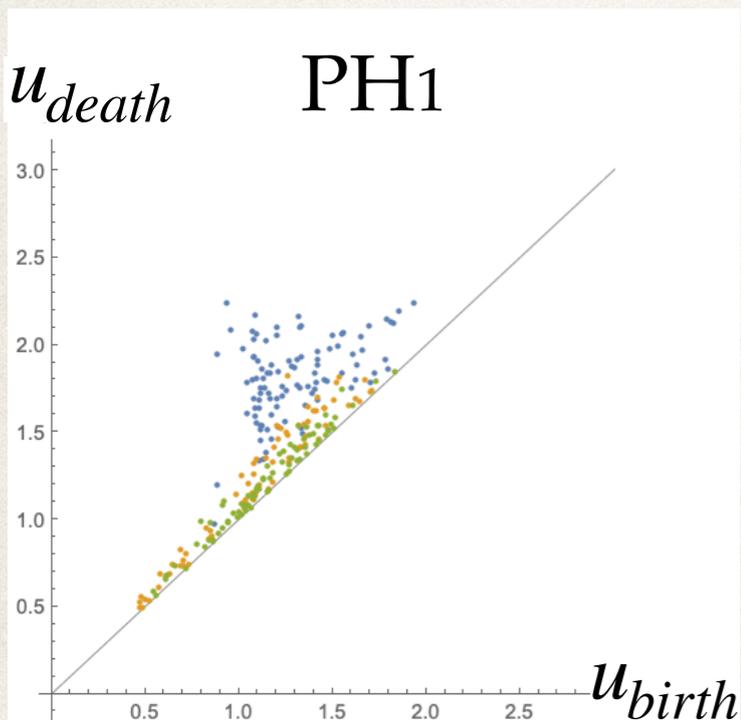
モンテカルロデータの解析結果

$$N = 4, k = 0.01, \lambda = 1$$

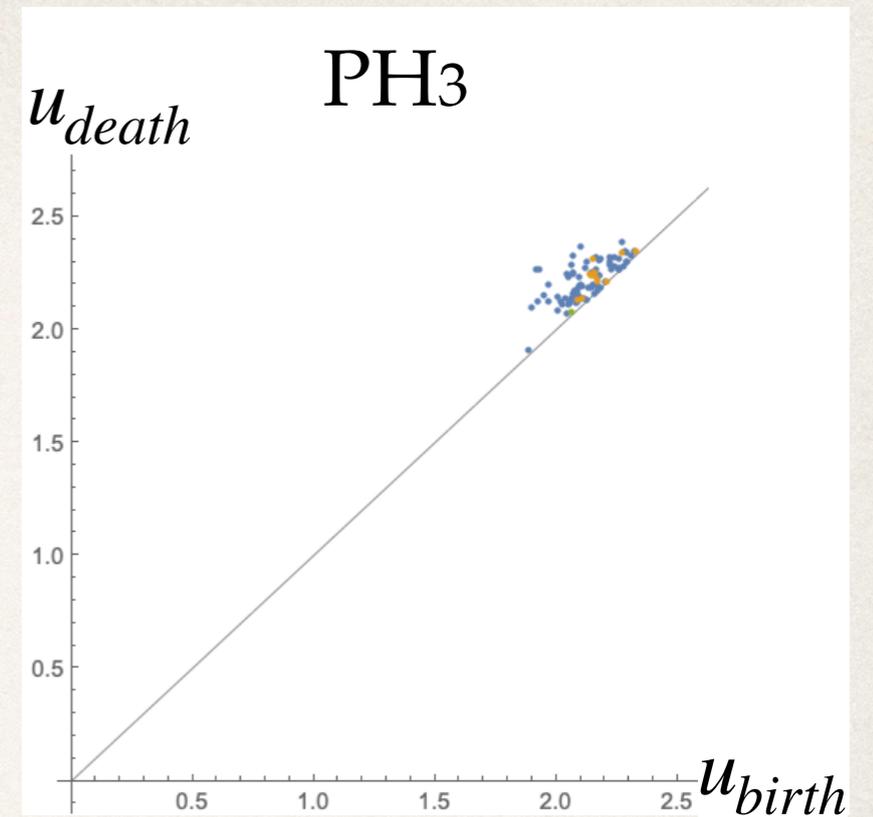
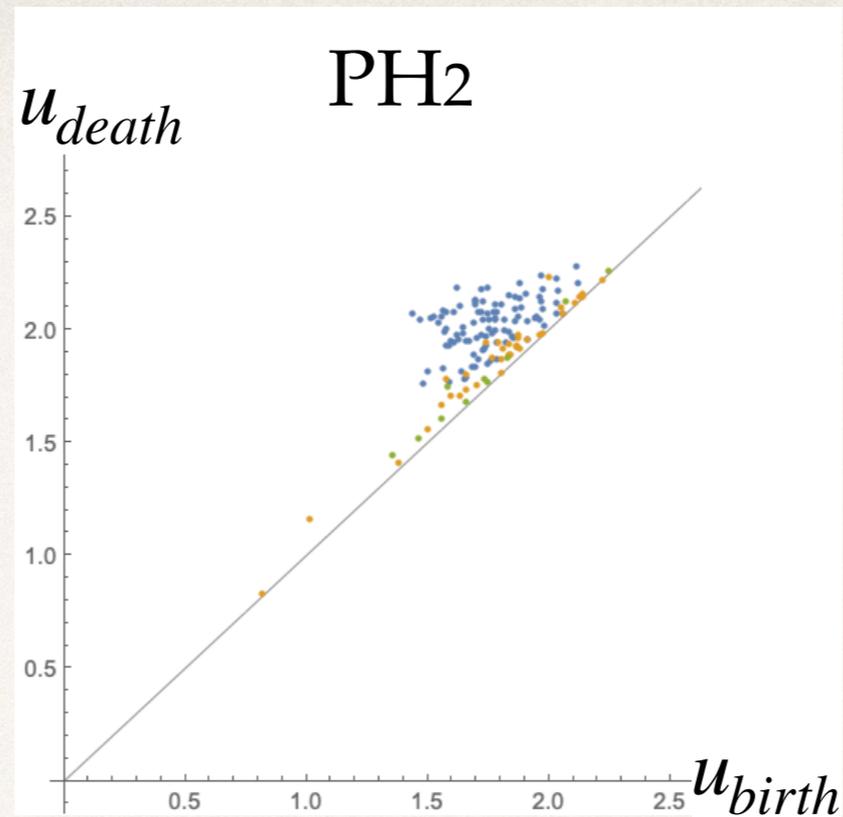
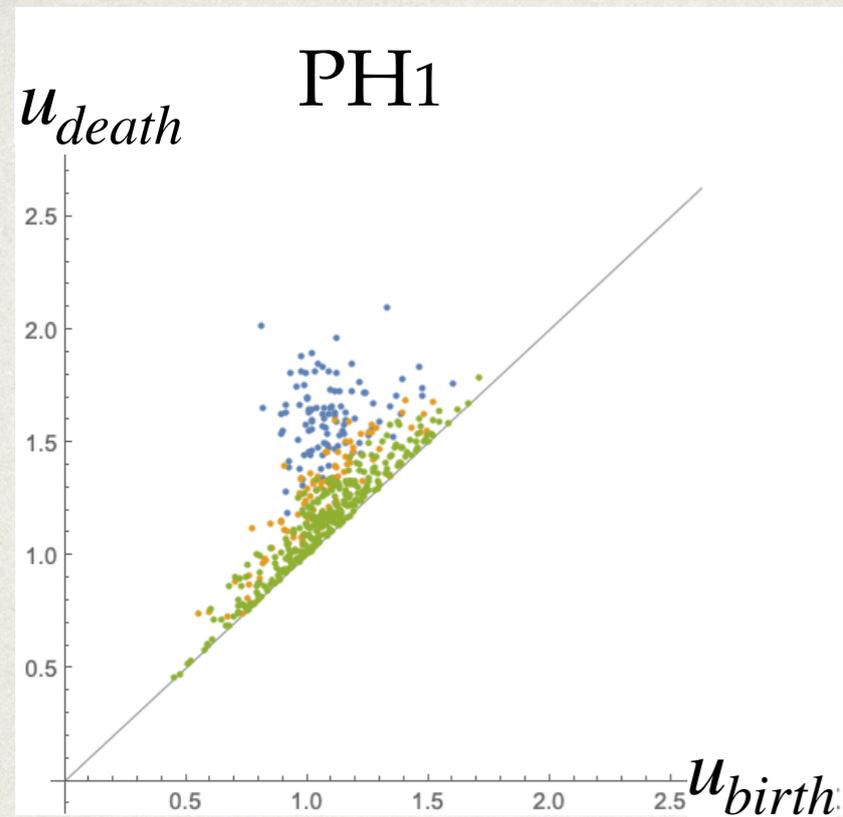
● R=10



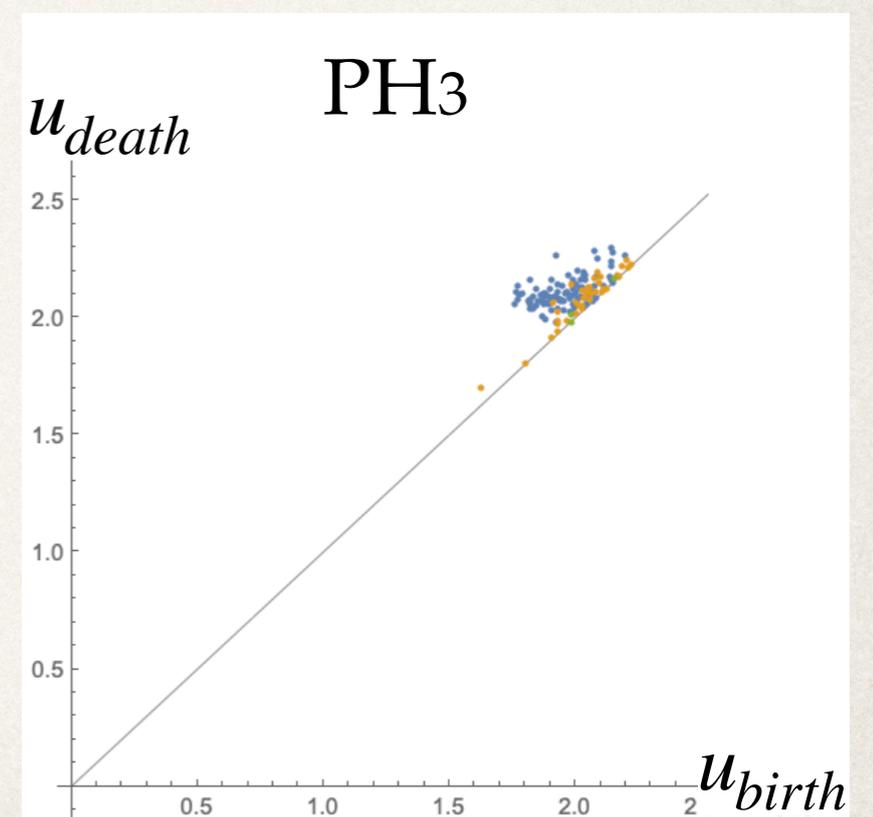
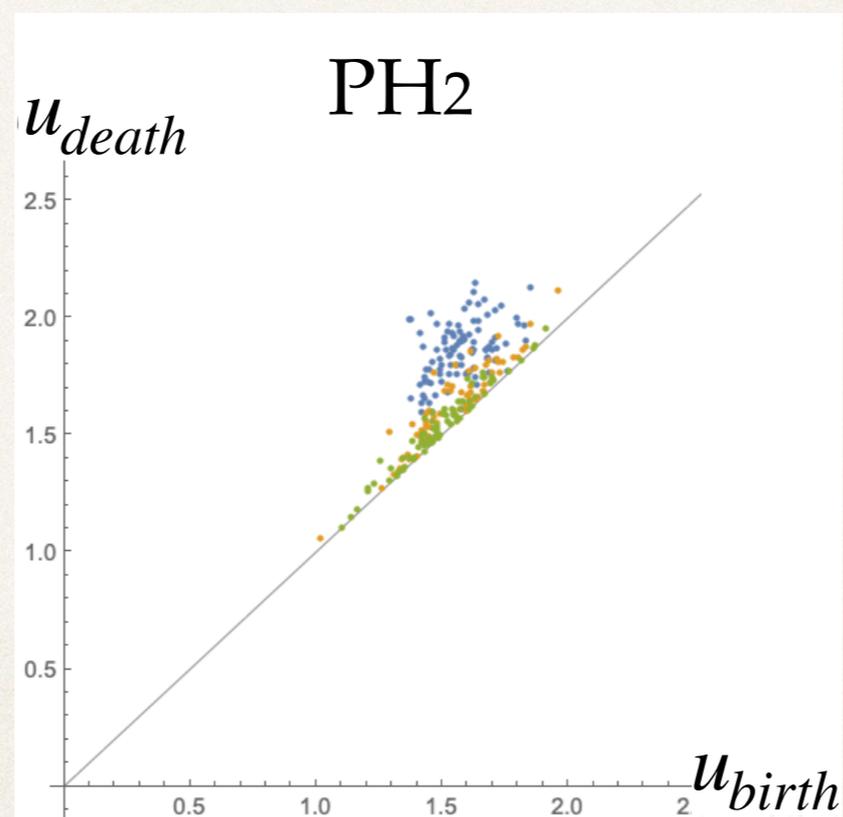
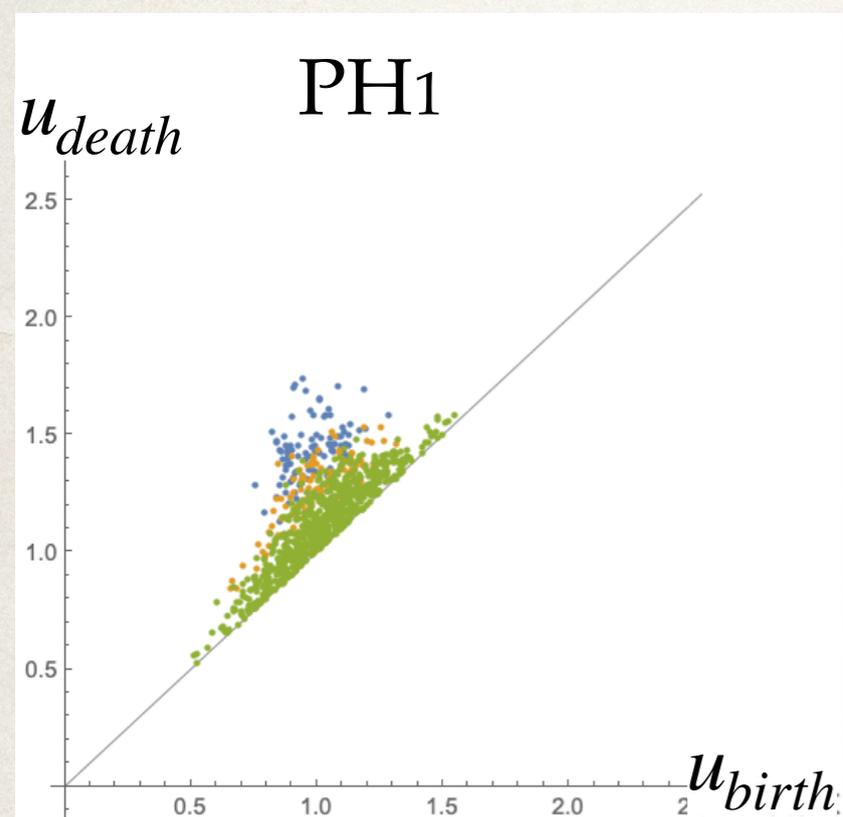
● R=15



● R=20



● R=25

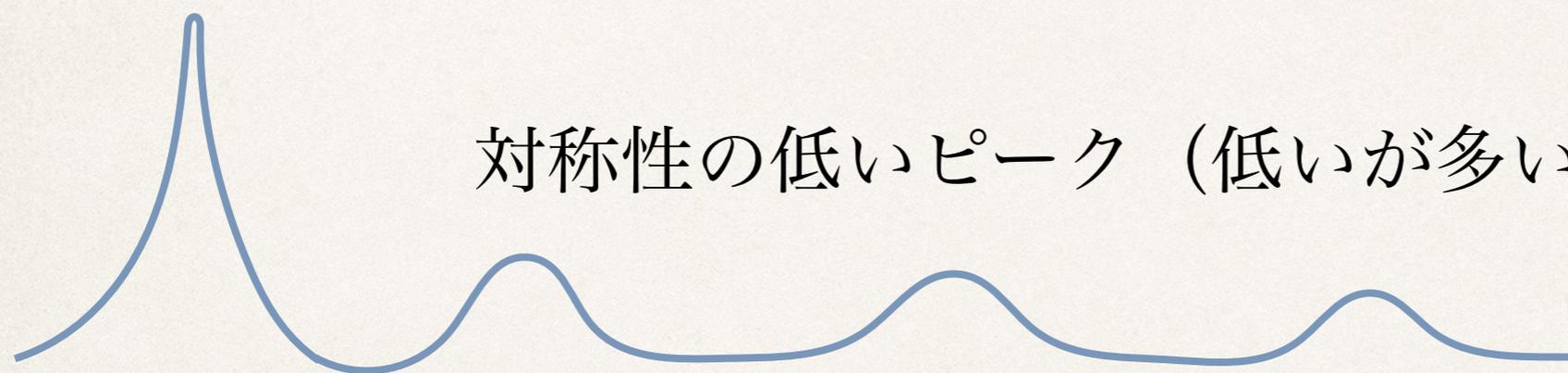


$S^1 \rightarrow S^2 \rightarrow S^3$

それぞれのプロットには若干の違いはあるものの、ほぼ傾向として、 $R = 10 \rightarrow 25$ にかけて、トポロジーが $S^1 \rightarrow S^2 \rightarrow S^3$ と変化することが観察される。

実はこの振る舞いは、対称性とピークの関係の定性的性質と合致する。

対称性の高いピーク（高いが少ない）



対称性の低いピーク（低いが多い）

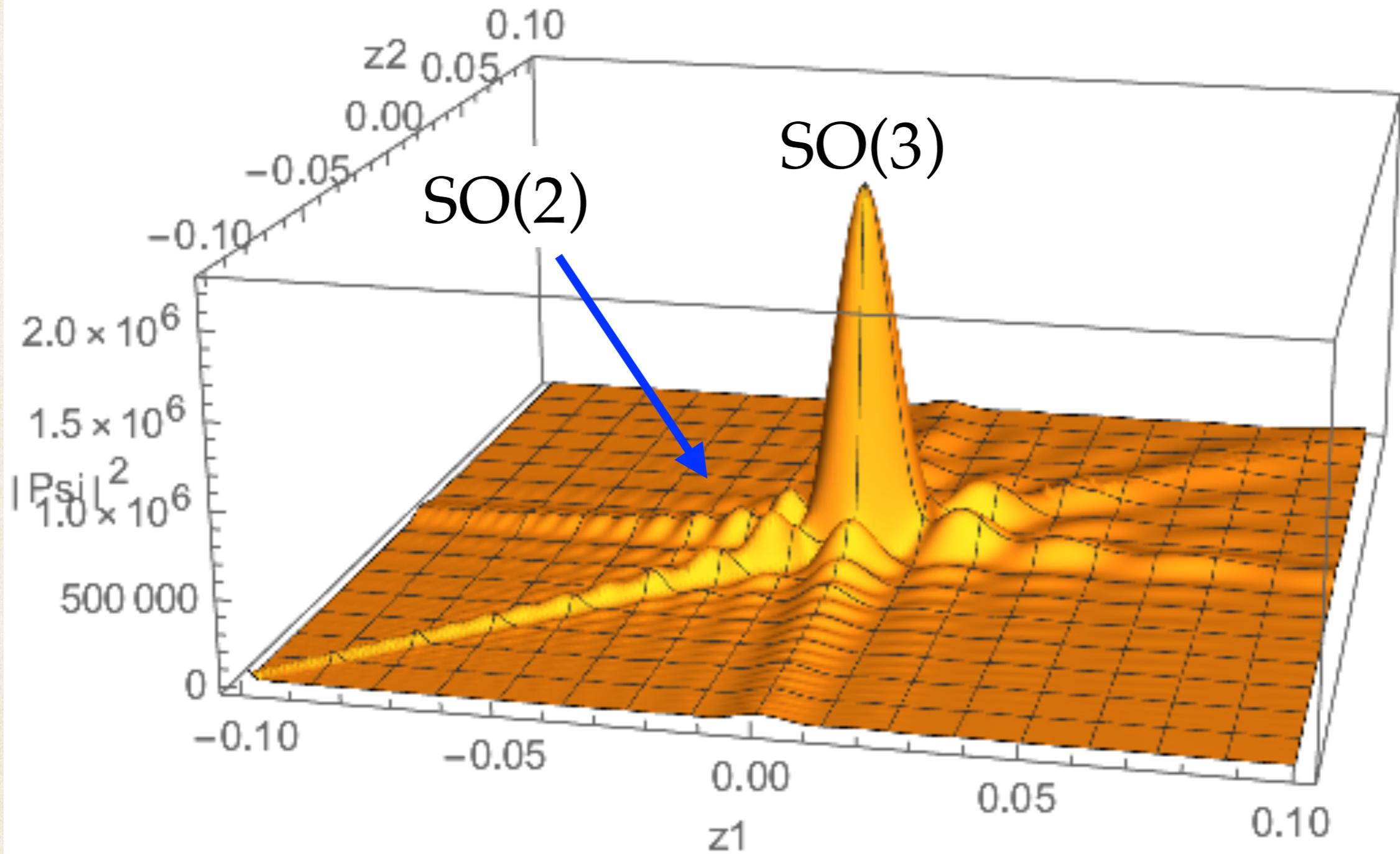
$$Z_{N,R} = \int dP e^{-\frac{1}{4\lambda} P^2} \bar{\varphi}(P)^R$$

R が大きいほど高いピークが効く

対称性が高いと gauge orbitの次元も高い

R が小から大になるにつれ、低から高次元のorbitが効くようになる。

ピークの具体例 (N=4)



§ 摂動計算

大きさの方向と角度方向を分離： $\phi_a^i = r \tilde{\phi}_a^i$

$$Z_{N,R}(\lambda, k) := \int_{\mathbb{R}^{NR}} d\phi e^{-\lambda \sum_{i,j=1}^R (\phi_a^i \phi_a^j)^3 - k \sum_{i=1}^R \phi_a^i \phi_a^i}$$

$$= \int_0^\infty dr f(\lambda r^6) e^{-kr^2}$$

$$f(t) := \int_{S^{NR-1}} d\tilde{\phi} e^{-t \sum_{i,j=1}^R (\tilde{\phi}_a^i \tilde{\phi}_a^j)^3}$$

$f(t)$ は整関数(entire function)：有限な t の領域に特異点は存在しない。
 t についての摂動展開は収束半径 ∞ 。

$f(t)$ は t について単調減少 \rightarrow 近似に対するクロスチェックに使える

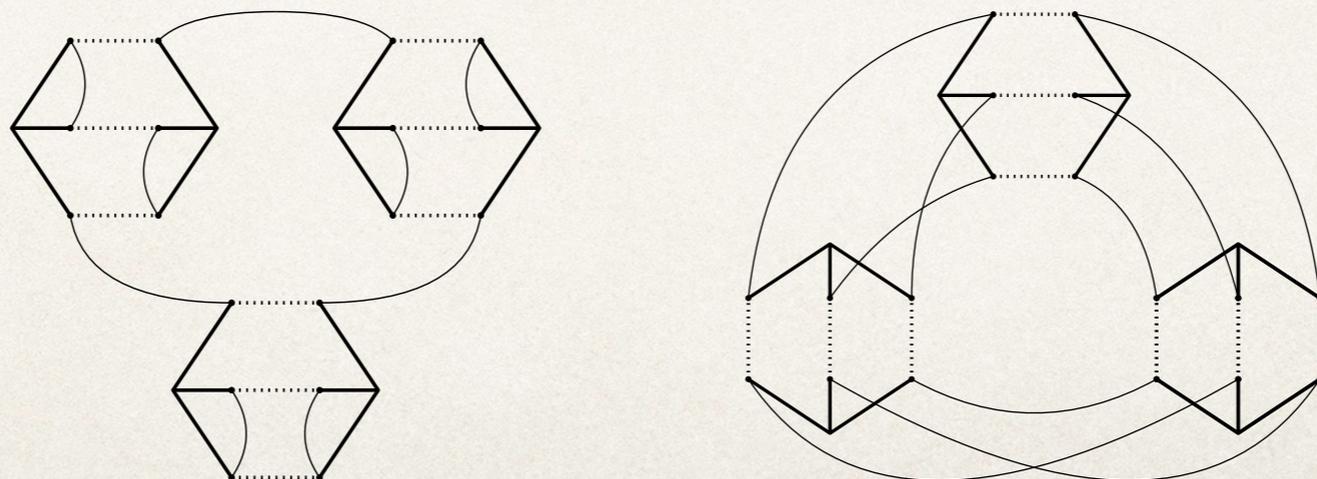
$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \int_{S^{NR-1}} d\tilde{\phi} \left(\sum_{i,j=1}^R (\tilde{\phi}_a^i \tilde{\phi}_a^j)^3 \right)^n \\
&= c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n \Gamma(NR/2)}{n! \Gamma(NR/2 + 3n)} \int_{\mathbb{R}^{RN}} d\phi \left(\sum_{i,j=1}^R (\phi_a^i \phi_a^j)^3 \right)^n e^{-\phi^2}
\end{aligned}$$

各オーダーで通常のファイマンダイアグラムによる計算ができる

1/Rのleadingで摂動展開を計算する。

各オーダーで1/Rのleadingで効くのはネックレス状のグラフ

$n = 3$ の例



これらの $1/R$ leadingを足しあげると

$$f(t) = \left(1 + \frac{12t}{N^3 R^2}\right)^{-\frac{N(N-1)(N+4)}{12}} \left(1 + \frac{6(N+4)t}{N^3 R^2}\right)^{-\frac{N}{2}}$$

Lionni, NS, arXiv:1903.05944

ほぼentire function : 特異点は $t \sim -N^2 R^2, -N^3 R^2$ なので、
 $t \geq 0$ からは大きく離れている。

t について確かに単調減少。

かなり複雑になるが、Next leadingの計算も行なった。

しかし、モンテカルロとのズレを説明できるほどの変更はなかった。

観測量の期待値はcouplingについて微分をとる事により計算できる。

$$S = \lambda U(\phi) + k \phi^2 + \lambda_d U_d(\phi)$$

$$U(\phi) = \sum_{i,j=1}^R (\phi_a^i \phi_a^j)^3 \quad \phi^2 = \sum_{i=1}^R \phi_a^i \phi_a^i$$

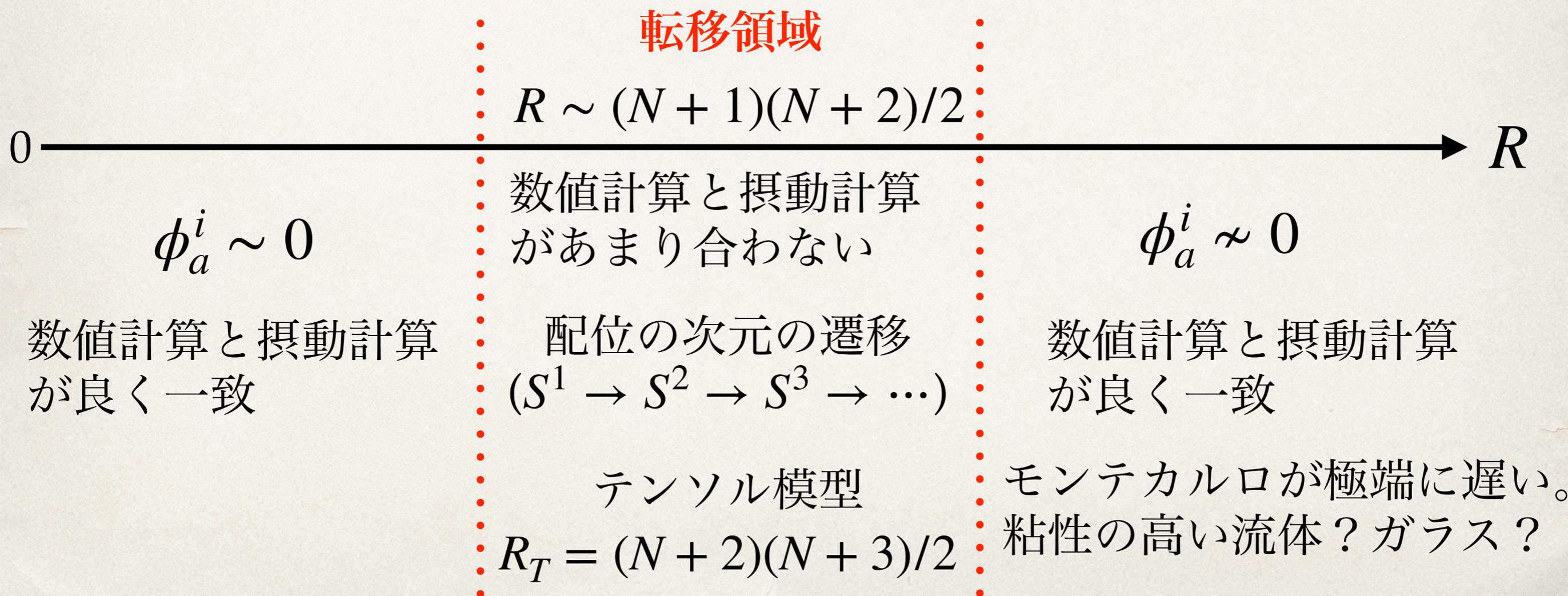
$$U_d(\phi) = \sum_{i=1}^R (\phi_a^i \phi_a^i)^3$$

λ_d を入れた場合の摂動計算も実行した。

Next leading order の計算も行った。

§ まとめ

- テンソル模型に関連した波動関数を積分して得られる行列模型の性質を調べた。これは過去にスピングラスで現れたものとはほぼ同一であるが、異なる点もあり、解析を新たに行う必要がある。
- 数値的方法として、メトロポリス法によるモンテカルロ計算を行い、また、摂動的方法による解析的計算も行なった。



§ 展望

- Large N 極限の理解にはまだまだ不満足。特に相転移近傍の性質を正確に理解することが、テンソル模型の理解にとって不可欠。
Tempering+Hybridで現在更に計算中。
 - 相転移なのか、crossoverなのか？ 例えば、気体 \leftrightarrow 流体転移のようなものなのか？ ガラスとの関係は？
 - 時空と流体
 - トポロジーの変化は波動関数のピークの存在と定性的に一致するが、もっと正確に理解したい。
 - ピーク構造を非摂動的に分配関数の計算に取り入れる方法を考える必要がある。モンテカルロ計算とのズレの説明となる可能性がある。

- テンソル模型にもっと密接に関係する行列模型。符号問題が現れる。

- ピークが鋭い波動関数に相当する行列模型。複素。符号問題。

$$\int_{\mathbb{R}^{NR}} d\phi e^{-\lambda \sum_{i,j=1}^R (\phi_a^i \phi_a^j)^3 + i k \phi^2}$$

- テンソル模型と正確に対応する行列模型。符号問題。

$$\int_{\mathbb{R}^{NR}} d\phi e^{-\lambda \sum_{i,j=1}^R (\phi_a^i \phi_a^j)^3} \prod_{i=1}^R \text{Ai}(-k \phi_a^i \phi_a^i)$$

