ランダムユニタリー行列の準位間隔比分布

(準位間隔 ruby: ギャップ)

有限 N 補正・ζ 零点

西垣 真祐 島根大

SMN, "Distributions of consecutive level spacings of CUE and their ratio"
PTEP 2025, 000000 = 2507.10193 [math-ph]

SMN, "Distributions of consecutive level spacings of GUE and their ratio"
PTEP 2024, 081A01 = 2407.15704 [math-ph]
⇒ 最近の注目論文から 日本物理学会誌 2025/1
⇒ JPS Hot Topics 5 (2025) 014 [YouTube 動画]

離散的手法による場と時空のダイナミクス 2025

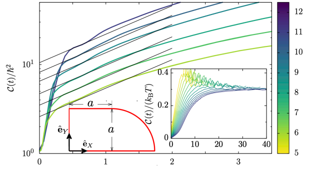
1. **背景/動機**
   - 量子カオス性の指標
   - ランダム行列の分類
   - 遷移準位統計
   - ギャップ比分布
2. **DPPの Jánossy密度**
   - 円周型ユニタリ集団
   - ギャップ確率
   - Jánossy密度
   - Jánossy 密度：CUE_∞
3. **ギャップ比分布**
   - Tracy-Widom法
   - Jánossy 密度：CUE_N
   - ギャップ比分布：CUE_N
4. **Riemann ζ零点**
   - ζ関数とRMT
   - ζ関数と量子力学
   - 零点間隔比分布
   - 有限サイズ補正

1. 背景/動機

量子カオス性の指標

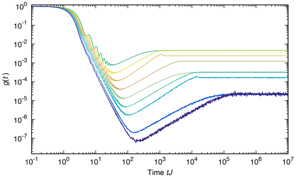
量子カオス = 古典的非可積分系の量子化 $|\Psi(t)\rangle = U(t)|\Psi_0\rangle$ or $H|n\rangle = E_n|n\rangle$

- 非時間順序積 $\mathcal{C}(t) = \langle |[Q(t), P(0)]|^2 \rangle \propto \mathrm{e}^{2\lambda t}$, 極 skipping $G^{\mathrm{R}}_{\rho\rho}(\omega = i\lambda, k = i\frac{\lambda}{v}) \sim \frac{0}{0}$
- Krylov 複雑度 $C(t) = \sum_n n |\langle K_n|\Psi(t)\rangle|^2$, $\{|K_n\rangle\} = \{H^n|\Psi_0\rangle\}_{n\geq 0}$ の GS 直交化
- 準位統計：Wigner (ランダム行列) $\leftrightarrow$ Poisson as カオス $\leftrightarrow$ 局在
  - 形状因子/相関関数 $g(t) = \langle \sum_{n,m} \mathrm{e}^{i(E_n - E_m)t} \rangle = \int d\epsilon\, \mathrm{e}^{i\epsilon t} R_2(\epsilon)$, $\epsilon_{nm} = E_n - E_m$
  - 準位間隔分布 $P(s)$, $s_n = \bar{\rho}(E_n)(E_{n+1} - E_n)$ ← 規格化 unfolding が必要 ↑



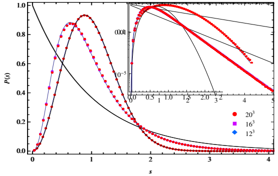
Sinai ビリヤード：非時間順序積

García-Mata et al. 2022



SYK 模型：形状因子

Cotler et al. 2016



Anderson 模型：準位間隔分布

Nishigaki 1999

ランダム行列の分類

Riemann 対称空間 Cartan 1926

class	Lie 群/極大部分群	$\mathcal{T}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{P}$	β
A	$\mathrm{U}(N)$				2
AI	$\mathrm{U}(N)/\mathrm{O}(N)$	$+$			1
AII	$\mathrm{U}(2N)/\mathrm{Sp}(N)$	$-$			4
BD	$\mathrm{O}(N)$		$+$		2
C	$\mathrm{Sp}(N)$		$-$		2
AIII	$\mathrm{U}(N+N')/\mathrm{U}(N)\times\mathrm{U}(N')$			$+$	2
BDI	$\mathrm{O}(N+N')/\mathrm{O}(N)\times\mathrm{O}(N')$	$+$	$+$	$+$	1
CII	$\mathrm{Sp}(N+N')/\mathrm{Sp}(N)\times\mathrm{Sp}(N')$	$-$	$-$	$+$	4
CI	$\mathrm{Sp}(N)/\mathrm{U}(N)$	$+$	$-$	$+$	1
DIII	$\mathrm{O}(2N)/\mathrm{U}(N)$	$-$	$+$	$+$	4

例：**AI** $\mathrm{U}(N)/\mathrm{O}(N) \ni \{U \sim UO\} \ \mapsto \ \mathcal{U} = UU^T \in$ 対称 $\mathrm{U}(N)$

対合対称性 $\mathcal{T}\mathcal{U}\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{U}^\dagger \ (\mathcal{T}^2 = +1)$, $\mathcal{C}\mathcal{U}\mathcal{C}^{-1} \neq \mathcal{U}$, $\mathcal{P}\mathcal{U}\mathcal{P}^{-1} \neq \mathcal{U}^\dagger$

$\mathcal{T}$：反ユニタリ　$\mathcal{C}$：反ユニタリ　$\mathcal{P}$：ユニタリ

不変測度 $d\mu(\mathcal{U}) = d\mu(V\mathcal{U}V^T) \propto \prod_i d\theta_i \prod_{j<k} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^1$

ランダム行列の分類

Topological 絶縁/超伝導体 H **測定+ランダム時間発展 K** **Kawabata et al 2025**

class	$d=0$	1	2	3	4	5	6	7	$\mathcal{T}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{P}$
A	$\mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}$				
AIII		$\mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}$			$+$
AI	$\mathbb{Z}$				$2\mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$+$		
BDI	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$				$2\mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}_2$	$+$	$+$	$+$
D	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$				$2\mathbb{Z}$			$+$	
DIII		$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$				$2\mathbb{Z}$	$-$	$+$	$+$
AII	$2\mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$				$-$		
CII		$2\mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$			$-$	$-$	$+$
C			$2\mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$			$-$	
CI				$2\mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	$+$	$-$	$+$

Schnyder-Ryu-Furusaki-Ludwig 2008 (被引用数 $\simeq 4100$), Kitaev 2009 (被引用数 $\simeq 2900$)

$$H_d(\mathbf{k}) \mapsto H_{d+1}(\mathbf{k}, k) = \begin{cases} H_d(\mathbf{k}) \otimes \sigma_x \cos k \; + \; \mathbb{I} \otimes \sigma_y \sin k & : \; d \text{ 偶} \\ H_d(\mathbf{k}) \qquad \cos k \; + \; \overbrace{\mathbb{I} \otimes \sigma_z}^{\mathcal{P}} \sin k & : \; d \text{ 奇} \end{cases}$$

$\approx$ Bott 1956

ランダム行列の分類

円周型ランダム行列 $\{\mathcal{U}\} \overset{\text{def}}{=}$ RSS 上の一様分布 **Zirnbauer 1996**

class	Lie 群/極大部分群	$\pm\theta_i$	a	b	β
CUE	$\mathrm{U}(N)$	N	並進不変		2
COE	$\mathrm{U}(N)/\mathrm{O}(N)$	N			1
CSE	$\mathrm{U}(2N)/\mathrm{Sp}(N)$	N			4
BD	$\mathrm{O}^{\pm}(N_{e,o})$	Y	$\mp 1/2$	$\mp 1/2$	2
C	$\mathrm{Sp}(N)$	Y	$1/2$	$1/2$	2
chCUE	$\mathrm{U}(N+N')/\mathrm{U}(N)\times\mathrm{U}(N')$	Y	ν	0	2
chCOE	$\mathrm{O}(N+N')/\mathrm{O}(N)\times\mathrm{O}(N')$	Y	$\nu-1$	-1	1
chCSE	$\mathrm{Sp}(N+N')/\mathrm{Sp}(N)\times\mathrm{Sp}(N')$	Y	$\nu+1/2$	$1/2$	4
CI	$\mathrm{Sp}(N)/\mathrm{U}(N)$	Y	0	0	1
DIII	$\mathrm{O}^{+}(2N_{e,o})/\mathrm{U}(N_{e,o})$	Y	$0, 1/2$	0	4

$$d\mu(\mathcal{U}) \propto \prod_i d\theta_i \cdot \prod_{j<k} |\mathrm{e}^{i\theta_j} - \mathrm{e}^{i\theta_k}|^\beta \quad \text{(nonchiral)}$$

↖ バルク極限 $0 \ll \theta_i \ll \pi$

$$\propto \prod_i d\cos\theta_i \, \sin(\theta_i/2)^{\beta a} \cos(\theta_i/2)^{\beta b} \cdot \prod_{j<k} |\cos\theta_j - \cos\theta_k|^\beta \quad \text{(chiral)}$$

ランダム行列の分類

円周型ランダム行列 $\{\mathcal{U}\} \stackrel{\text{def}}{=}$ RSS 上の一様分布 Zirnbauer 1996

class	Lie 群/極大部分群	$\pm\theta_i$	a	b	β
CUE	$\mathrm{U}(N)$	N	並進不変		2
COE	$\mathrm{U}(N)/\mathrm{O}(N)$	N			1
CSE	$\mathrm{U}(2N)/\mathrm{Sp}(N)$	N			4
BD	$\mathrm{O}^{\pm}(N_{e,o})$	Y	$\mp 1/2$	$\mp 1/2$	2
C	$\mathrm{Sp}(N)$	Y	$1/2$	$1/2$	2
chCUE	$\mathrm{U}(N+N')/\mathrm{U}(N)\times\mathrm{U}(N')$	Y	ν	0	2
chCOE	$\mathrm{O}(N+N')/\mathrm{O}(N)\times\mathrm{O}(N')$	Y	$\nu-1$	-1	1
chCSE	$\mathrm{Sp}(N+N')/\mathrm{Sp}(N)\times\mathrm{Sp}(N')$	Y	$\nu+1/2$	$1/2$	4
CI	$\mathrm{Sp}(N)/\mathrm{U}(N)$	Y	0	0	1
DIII	$\mathrm{O}^{+}(2N_{e,o})/\mathrm{U}(N_{e,o})$	Y	$0, 1/2$	0	4

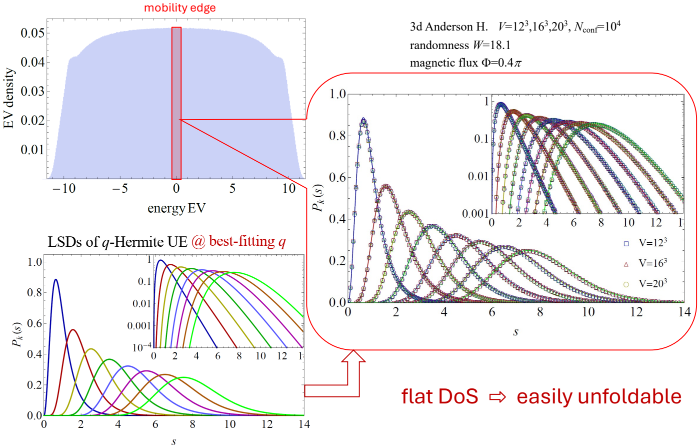
$$d\mu(\mathcal{U}) \;\propto\; \prod_{i=1}^{N} d\theta_i \cdot \prod_{j<k}^{N} |\mathrm{e}^{i\theta_j} - \mathrm{e}^{i\theta_k}|^{\beta} \quad \text{(nonchiral) C}\beta\text{E}_N$$

並進不変な chaotic スペクトルの唯三の模型 $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ 有限 N 補正も記述?

遷移準位統計

Anderson 強束縛模型 $H = (i\nabla + \mathbf{A})^2 + V^{\mathrm{i.i.d.}}_{\mathrm{random}}(x)$

Nishigaki 1999; 2017 (unpub)

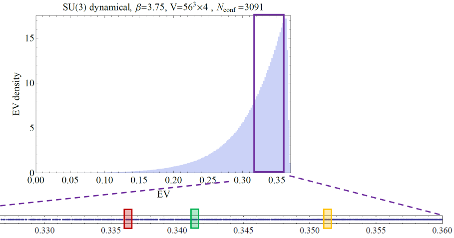


flat DoS ⇨ easily unfoldable

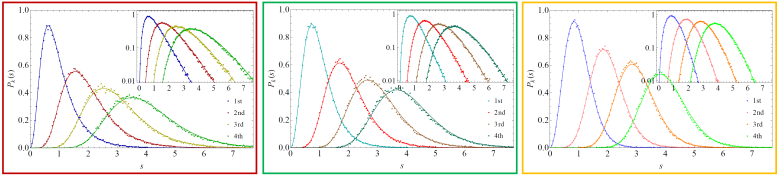
遷移準位統計

QCD Dirac 演算子 (高温相) $\quad \not{D} = \gamma_\mu(i\partial_\mu + A_\mu(x))$

Nishigaki et al. 2017 (unpub)



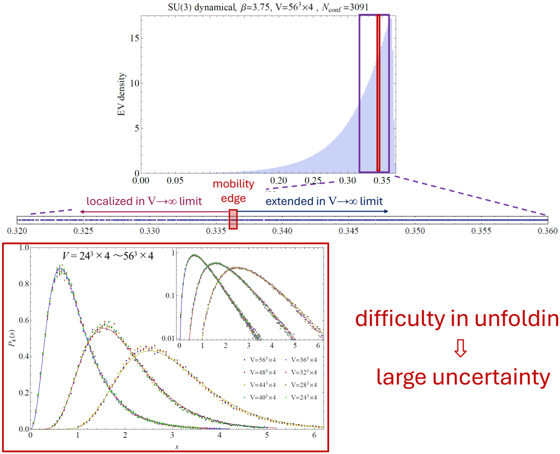
LSDs of q-Hermite UE @ best-fitting q



遷移準位統計

QCD Dirac 演算子 (高温相) $\quad \not{D} = \gamma_\mu(i\partial_\mu + A_\mu(x))$

Nishigaki et al. 2017 (unpub)



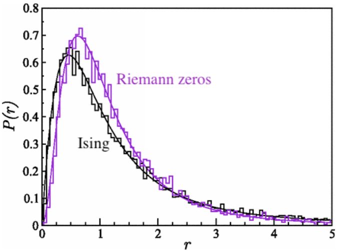
difficulty in unfolding

⇩

large uncertainty

ギャップ比分布

- 準位統計：Wigner (ランダム行列) $\leftrightarrow$ Poisson as カオス $\leftrightarrow$ 局在
  - 形状因子/相関関数 $g(t) = \langle \sum_{n,m} \mathrm{e}^{i(E_n - E_m)t} \rangle = \int d\epsilon\, e^{i\epsilon t} R_2(\epsilon),\ \epsilon_{nm} = E_n - E_m$
  - 準位間隔分布 $P(s)$, $s_n := \bar{\rho}(E_n)(E_{n+1} - E_n)$ $\swarrow$ unfolding 不要
  - 準位間隔(ギャップ)比分布 $P_{\mathrm{r}}(r)$, $r_n := \dfrac{E_{n+1} - E_n}{E_n - E_{n-1}}$ or $\tilde{r}_n := \min(r_n, r_n^{-1}) \leq 1$



縦横磁場 Ising 鎖, Riemann ζ 零点：ギャップ比分布

Oganesyan-Huse 2007, Atas et al. 2013

ギャップ比分布: Wigner 仮説

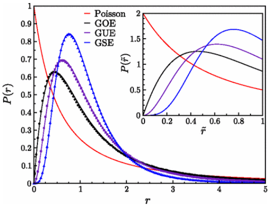
Atas-Bogomolny-Giraud-Roux 2013 $\quad \mathrm{C}\beta\mathrm{E}_{N=\infty} = \mathrm{G}\beta\mathrm{E}_{N=\infty} \to \mathrm{G}\beta\mathrm{E}_{N=3}$ で近似

$$\mathrm{G}\beta\mathrm{E}_3 \quad : \quad \mathsf{JPD}(x_1, x_2, x_3) \propto \mathrm{e}^{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} |(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)|^\beta$$

$$\Rightarrow \quad P_{\mathrm{r}}^{\mathrm{Wig}}(r) = \iiint_{x_1 < x_2 < x_3} dx_1 dx_2 dx_3 \, \mathsf{JPD}(x_1, x_2, x_3) \delta\left(r - \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1}\right)$$

$$= C_\beta \frac{(r + r^2)^\beta}{(1 + r + r^2)^{1 + \frac{3}{2}\beta}} \qquad \text{[+ 経験則的補正]}$$

$$\Rightarrow \quad \langle \tilde{r} \rangle = 0.5307(1), 0.5996(1), 0.6744(1) \ (\beta = 1, 2, 4) \quad \Rightarrow \quad \#\text{被引用数} = 1230$$



多くの文献は GUE_3 近似を「$\mathcal{T}$ 不変でない量子カオス系の予想値」として引用

$\cdots \to$ 本研究の目的：**CUE$_N$ の厳密解 $\Rightarrow$ large-N 極限 + 有限 N 補正の評価**

結果予告：CUE$_N$

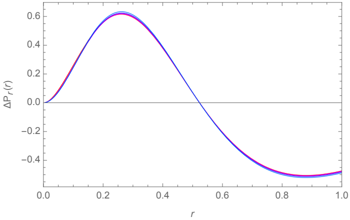
$$\text{核} \quad K(\theta,\theta')\big|_{\theta=\frac{2\pi}{N}x} = \underbrace{K_{\sin}(x,x')}_{\mathrm{CUE}_\infty=\mathrm{GUE}_\infty} + \overbrace{\frac{1}{N^2}K^{(2)}(x,x') + \frac{1}{N^4}K^{(4)}(x,x') + \cdots}^{\text{有限 } N \text{ 補正}}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{準位間隔分布} \quad P(\theta)\big|_{\theta=\frac{2\pi}{N}s} = P^{\sin}(s) + \frac{1}{N^2}P^{(2)}(s) + \frac{1}{N^4}P^{(4)}(s) + \cdots$$

$$\text{隣接準位間隔比分布} \quad P_\mathrm{r}(r) = P_\mathrm{r}^{\sin}(r) + \frac{1}{N^2}P_\mathrm{r}^{(2)}(r) + \frac{1}{N^4}P_\mathrm{r}^{(4)}(r) + \cdots$$

would-be leading 補正=0



$N^4(P_\mathrm{r}(r) - P_\mathrm{r}^{\sin}(r))$

for CUE$_N$, $N = 8, \ldots, 16$

2 DPPのJánossy密度

円周型ユニタリ集団

CUE$_N$ の固有位相の連結分布

$$
\begin{aligned}
\mathsf{JPD}(\theta_0,\dots,\theta_{N-1}) &\propto \prod_{0\le j<k\le N-1} \left|\mathrm{e}^{i\theta_j}-\mathrm{e}^{i\theta_k}\right|^2 \\
&= \det_{j,\ell}[\mathrm{e}^{i\ell\theta_j}]\ \det_{k,\ell}[\mathrm{e}^{-i\ell\theta_k}] \\
&= \det_{j,k}\left[\sum_{\ell=0}^{N-1}\mathrm{e}^{i\ell(\theta_j-\theta_k)}\right] \propto \frac{1}{N!}\det\Bigg[\underbrace{\frac{1}{2\pi}\frac{\sin(N(\theta_j-\theta_k)/2)}{\sin((\theta_j-\theta_k)/2)}}_{K(\theta_j,\theta_k)\text{：核（カーネル）}}\Bigg]_{j,k=0}^{N-1}
\end{aligned}
$$

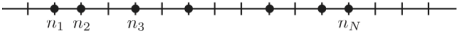
$$
\Rightarrow\ R_p(\theta_0,\dots,\theta_{p-1}) = \det[K(\theta_j,\theta_k)]_{j,k=0}^{p-1} \quad \text{by} \quad \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, K(\theta,\theta)=N,\ \ K*K=K
$$

$$
\Rightarrow \mathrm{Prob}(\text{no EV in } I) = \mathrm{Det}\,(\mathbb{I}-\boldsymbol{K}|_I) \qquad (\boldsymbol{K}|_I f)(\theta)=\int_I d\theta'\,K(\theta,\theta')f(\theta')
$$

行列式点過程 (連続的 DPP)

ギャップ確率

離散的 DPP



$$\mathrm{Prob}(n_1, \ldots, n_p \text{に粒子あり}) = \det[K(n_j, n_k)]_{j,k=1}^{p}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Prob}(n \text{ に粒子がない}) = 1 - K(n,n)$$

$$\mathrm{Prob}(n, n' \text{に粒子がない}) = 1 - K(n,n) - K(n',n') + \overbrace{\begin{vmatrix} K(n,n) & K(n,n') \\ K(n',n) & K(n',n') \end{vmatrix}}^{n \text{ と } n' \text{ に粒子がある引き過ぎを補正}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 - K(n,n) & -K(n,n') \\ -K(n',n) & 1 - K(n',n') \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{Prob}(n, n', n'' \text{に粒子がない}) = \cdots$$

$$\mathrm{Prob}(\text{集合 } I \text{ に粒子がない}) = \det\left(\mathbb{I} - [K(n,n')]_{n,n' \in I}\right)$$

$$\Downarrow \text{ 連続極限 } \theta := n\epsilon,\ \epsilon \to 0$$

$$\mathrm{Prob}(\text{区間 } I \text{ に固有値がない}) = \mathrm{Det}\left(\mathbb{I} - \boldsymbol{K}|_I\right)$$

ギャップ確率 as Painlevé τ

連続的 DPP $\mathrm{Prob}\,(\text{区間 } I \text{ に固有値がない}) = \mathrm{Det}(\mathbb{I} - \boldsymbol{K}|_I)$

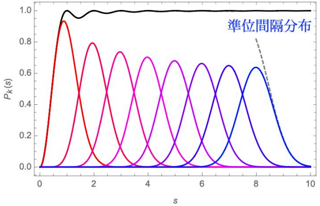
$$\boldsymbol{K}|_I : \text{積分演算子} \quad (\boldsymbol{K}|_I f)(\theta) = \int_I d\theta'\, K(\theta,\theta') f(\theta')$$

局所的 large N 極限 $\varphi_k(\theta) = \mathrm{e}^{ik\theta}\Big|_{\theta=\frac{2\pi}{N}x}^{k\simeq N} \to \mathrm{e}^{2\pi i x}$ ←↙ 広範な普遍性

$$K(\theta,\theta') = \frac{\sin(N(\theta-\theta')/2)}{2\pi\sin((\theta-\theta')/2)} \to \frac{\sin\pi(x-x')}{\pi(x-x')} := K_{\sin}(x,x')$$

Jimbo-Miwa-Môri-Sato 1980: IMD→ σ-PV

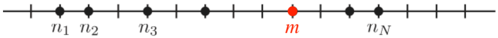
$$\mathrm{Det}\,(\mathbb{I} - \boldsymbol{K}_{\sin}|_{[0,s]}) = \mathrm{e}^{-\int_0^{\pi s}(dt/t)\sigma(t)}\ ,\ (t\sigma'')^2 + 4(t\sigma'-\sigma)(t\sigma'-\sigma+\sigma'^2) = 0$$



Jánossy 密度

離散的 DPP：1 粒子を $\boldsymbol{m}$ に固定

$$\tilde{K}(n,n') := K(n,n') - \frac{K(n,\boldsymbol{m})K(\boldsymbol{m},n')}{K(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m})}$$



- 他の粒子は $\boldsymbol{m}$ を避ける： $\tilde{K}(n,\boldsymbol{m}) = \tilde{K}(\boldsymbol{m},n') = 0$
- 射影性, 規格化を満たす： $\tilde{\boldsymbol{K}} = \left[\tilde{K}(n,n')\right]_{n,n'\neq m} = \tilde{\boldsymbol{K}} \cdot \tilde{\boldsymbol{K}}, \quad \mathrm{tr}\,\tilde{\boldsymbol{K}} = N-1$
- **条件つき連結分布 (m は占有済) に対する核**になる：

$$\tilde{R}_1(n|\boldsymbol{m}) = \frac{R_2(n,\boldsymbol{m})}{R_1(\boldsymbol{m})} = \frac{K(n,n)K(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}) - K(n,\boldsymbol{m})K(\boldsymbol{m},n)}{K(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m})} = \tilde{K}(n,n)$$

$$\tilde{R}_2(n_1,n_2|\boldsymbol{m}) = \frac{R_3(n_1,n_2,\boldsymbol{m})}{R_1(\boldsymbol{m})}$$

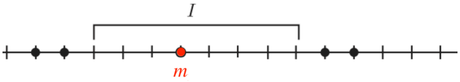
$$= \frac{K(n_1,n_1)K(n_2,n_2)K(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}) \pm (5\text{ 項})}{K(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m})} = \det\left[\tilde{K}(n_i,n_j)\right]_{i,j=1}^{2}, \quad \text{etc}$$

Jánossy 密度

Lemma (条件付きギャップ確率)

1 粒子 @ m がある前提で I が他の粒子を含まない確率は

$$\tilde{J}_1(I|\boldsymbol{m}) = \det(\mathbb{I} - \tilde{\boldsymbol{K}}|_I) \;, \quad \tilde{\boldsymbol{K}}|_I = \left[\tilde{K}(n,n')\right]_{n,n' \in I}$$

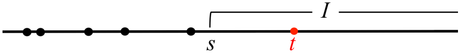


Jánossy 密度： I が **1 粒子 @ m のみを含む**確率

$$J_1(I;\boldsymbol{m}) = R_1(\boldsymbol{m}) \cdot \det(\mathbb{I} - \tilde{\boldsymbol{K}}|_I)$$

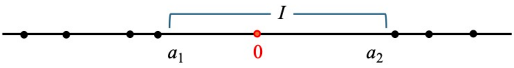
ギャップ端の粒子密度

$$J_1\left([s+\delta s,*];t\right) - J_1\left([s,*];t\right) \simeq \partial_s J_1\left([s,*];t\right)\delta s$$



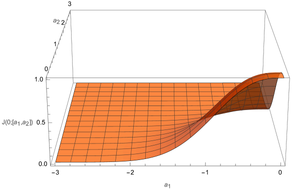
Jánossy 密度：CUE$_\infty$

$J_1([a_1,a_2];0) = \mathrm{Det}(\mathbb{I} - \tilde{\boldsymbol{K}}_{\sin}|_{[a_1,a_2]})$ を JMMS-TW 法で評価　**Nishigaki 2024 (前回)**

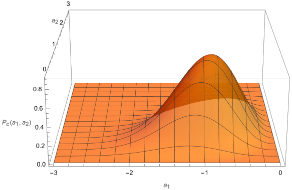


隣接準位間隔の連結分布　**隣接準位間隔比の分布**　**$\tilde{r}_n$ 比の期待値**

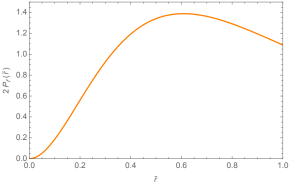
$$P_{\mathrm{c}}(a_1,a_2) = -\frac{\partial^2 J_1([a_1,a_2];0)}{\partial a_1 \partial a_2} \Rightarrow P_{\mathrm{r}}(r) = \int_0^\infty da\, a\, P_{\mathrm{c}}(-ra,a) \Rightarrow \langle \tilde{r} \rangle = 0.5997504209..$$



$J_1([a_1,a_2];0)$



$P_{\mathrm{c}}(a_1,a_2)$



$P_{\mathrm{r}}(r)$

3 ギャップ比分布

Tracy-Widom 法

Theorem (Tracy-Widom 1994)

1. 核：$K(x,y) = \dfrac{1}{x-y}\left[\psi^+(x)\ \psi^-(x)\right]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi^+(y) \\ \psi^-(y) \end{bmatrix} = \dfrac{\Psi(x)^T J \Psi(y)}{x-y}$
2. 2 成分関数 $\Psi(x)$ が有理係数 1 階 LDE を満たす：$\partial_x \Psi(x) = \mathcal{A}(x)\Psi(x)$, $\operatorname{tr}\mathcal{A}(x) = 0$

ならば, $\mathrm{Det}(\mathbb{I} - \boldsymbol{K}|_{[a_1,a_2]})$ は $\mathcal{A}(x)$ の係数を含む PDE 系 in a_1, a_2 により決定される

Lemma (Nishigaki 2021)

核 $K(x,y)$ が TW 法の適用可能条件を満たすならば, **条件付き**核 $\tilde{K}(x,y)$ も満たす

Proof.

$$\tilde{\Psi}(x) = \Psi(x) - \overbrace{\Psi(t)\frac{K(t,x)}{K(t,t)}}^{\text{固定された点 } t \text{ を避ける}} := \Omega(x)\Psi(x)\ ,\ \Omega(x) = \mathbb{I} - \frac{\Psi(t)\Psi(t)^T J}{K(t,t)(t-x)}\ :$$

有理 SL(2) gauge 変換

により条件付き核は $\tilde{K}(x,y) = \dfrac{\tilde{\Psi}(x)^T J \tilde{\Psi}(y)}{x-y}$ と表され,

$$\partial_x \tilde{\Psi}(x) = \tilde{\mathcal{A}}(x)\tilde{\Psi}(x)\ ,\ \operatorname{tr}\tilde{\mathcal{A}}(x) = \operatorname{tr}\left\{\Omega(x)\mathcal{A}(x)\Omega(x)^{-1} + \partial_x\Omega(x)\cdot\Omega(x)^{-1}\right\} = 0 \quad \square$$

Jánossy 密度：CUE_N

Tracy-Widom recipe

$$K(\theta,\theta') \propto \frac{\sin\frac{N(\theta-\theta')}{2}}{\sin\frac{\theta-\theta'}{2}} = \mathrm{e}^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\frac{\Psi(\theta)^T J\Psi(\theta')}{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{i\theta'}}\ ,\ \Psi(\theta)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{+i\frac{N}{2}\theta}\\ \mathrm{e}^{-i\frac{N}{2}\theta}\end{bmatrix}\quad (\text{前頁から } x=\mathrm{e}^{i\theta})$$

$$\partial_\theta\Psi(\theta)=\begin{bmatrix} i\frac{N}{2} & 0\\ 0 & -i\frac{N}{2}\end{bmatrix}\Psi(\theta) := \mathcal{A}\Psi(\theta)$$ ： TW 条件を満たす

$\Downarrow$ 1 つの固有値を $\theta=0$ に固定

$$\tilde K(\theta,\theta')=\mathrm{e}^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\frac{\tilde\Psi(\theta)^T J\tilde\Psi(\theta')}{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{i\theta'}}\ ,\ \tilde\Psi(\theta)=\Omega(\theta)\Psi(\theta)$$ ： Lemma から,TW 条件を満たす

$\Downarrow$ $I=[a_1,a_2]$, $\tilde K_I(\theta,\theta')=\tilde K(\theta,\theta')\chi_I(\theta')$ とすると

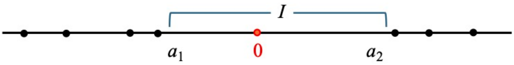
$$R_{jk}=(\mathbb{I}-\tilde{\boldsymbol{K}}_I)^{-1}\tilde K(a_j,a_k),\ Q_j^{\pm}=(\mathbb{I}-\tilde{\boldsymbol{K}}_I)^{-1}\tilde\psi^{\pm}(a_j),\ U^{\pm\pm}=\int_I dx\,\tilde\psi^{\pm}(\mathbb{I}-\tilde{\boldsymbol{K}}_I)^{-1}\tilde\psi^{\pm}$$

は閉じた PDE 系 in a_1,a_2 をなす

$$\Rightarrow\ \frac{\partial}{\partial a_j}\mathrm{Tr}\log(\mathbb{I}-\tilde{\boldsymbol{K}}_I)=(-)^{j+1}R_{jj}\quad\Rightarrow\quad \tilde J_1([a_1,a_2]|0)=\mathrm{Det}\,(\mathbb{I}-\tilde{\boldsymbol{K}}_I)$$

Jánossy 密度：CUE$_N$

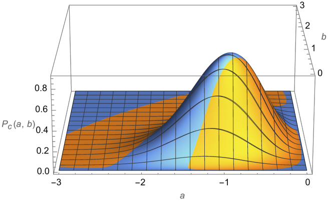
Tracy-Widom PDEs

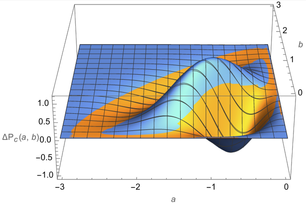


$$R_{jk} = \frac{Q_j^+ Q_k^- - Q_j^- Q_k^+}{\mathrm{e}^{ia_j} - \mathrm{e}^{ia_k}} \quad \xrightarrow{\text{積分}} \quad \tilde{J}_1([a_1,a_2]|0) \quad \xrightarrow{\text{微分}} \quad P_{\mathrm{c}}(a_1,a_2)$$

$$i(1-\mathrm{e}^{ia_j})\frac{\partial Q_j^\pm}{\partial a_j} = \mp\left\{\frac{N\pm 1}{2}(1-\mathrm{e}^{ia_j}) + U^{+-} - \frac{1}{N}\right\} Q_j^\pm + (N\pm 1)\left(U^{\pm\pm} - \frac{1}{N}\right) Q_j^\mp$$
$$- (-1)^k i(1-\mathrm{e}^{ia_k}) R_{jk} Q_k^\pm \quad (k \neq j)$$

$$\frac{\partial Q_j^\pm}{\partial a_k} = (-1)^k R_{jk} Q_k^\pm \quad (k\neq j)\ , \quad \frac{\partial U^{\pm\pm}}{\partial a_j} = (-1)^j Q_j^\pm Q_j^\pm \qquad N \mapsto -N \text{ で不変}$$





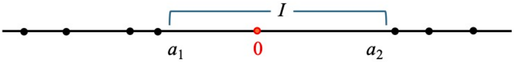
[左図] 隣接準位間隔の連結分布

$P_{\mathrm{c}}(a,b)$, $N = 8, 16$

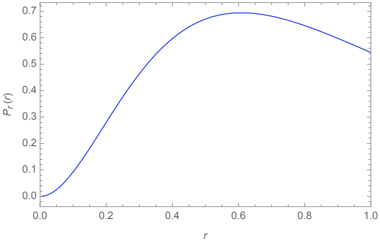
[右図] 有限 N 補正

$N^2\left(P_{\mathrm{c}}(a,b) - P_{\mathrm{c}}^{\sin}(a,b)\right)$

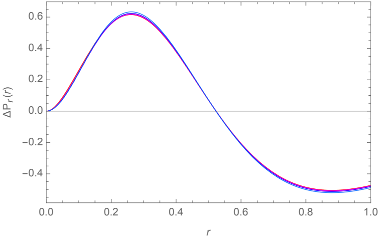
ギャップ比分布：CUE$_N$



$$P_{\mathrm{r}}(r) = \iint_{a_1<0<a_2} da_1 da_2\, P_{\mathrm{c}}(a_1, a_2)\, \delta(r - |a_1|/a_2)$$



ギャップ比分布：$P_{\mathrm{r}}(r)$, $N = 8, \ldots, 16$



有限 N 補正： $N^4\left(P_{\mathrm{r}}(r) - P_{\mathrm{r}}^{\sin}(r)\right)$

leading $\mathcal{O}(N^{-2})$ 補正が消失 $\Rightarrow$ ギャップ比分布は高次補正への窓口

4 Riemann ζ 零点

ζ 関数と RMT

$$\zeta(s)=\prod_{p\,:\,\text{素数}}\frac{1}{1-p^{-s}}=(\Gamma\text{因子})\zeta(1-s)\ ,\ \sigma=\max\mathrm{Re}(\text{非自明零点})\in[1/2,1)$$

$$\Rightarrow\ \#\{x\text{ 以下の素数 }\}=\mathrm{Li}(x)+\mathcal{O}(x^{\sigma}\log x)$$ Riemann 仮説 $=1/2$

Hilbert-Pólya 予想 ca.1912 $\zeta(\frac{1}{2}+it)\overset{?}{=}$ "$\det(t-\hat{H}_{\mathrm{HP}})$" s.t. $\hat{H}_{\mathrm{HP}}=\hat{H}_{\mathrm{HP}}^{\dagger}$

局所的: **Montgomery 予想** 1972/**Rudnick-Sarnak 予想** 1994 (形状因子の ramp 部分のみ証明)

$\zeta(\frac{1}{2}+it_n)=0\ \Rightarrow\ x_n=\frac{t_n}{2\pi}\log\frac{t_n}{2\pi}$ の 2 点相関 $R_2(x-x')$ は CUE$_\infty$=GUE$_\infty$ に漸近

局所的: **Katz-Sarnak 予想** 1997

バルク極限 ↑ ↖

L 関数の最小零点 $L(\frac{1}{2}+it_1,\chi_d)=0$ を χ_d について平均した分布は C$_\infty$, BD$_\infty$ に漸近

大域的: **Keating-Snaith 予想** 2000

ζ 関数の $[0,T]$ でのモーメントは CUE$_N$ ($N=\log\frac{T}{2\pi}$) の特性多項式と本質的に一致

$$\int_0^T\frac{dt}{T}\left|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)\right|^{2k}\overset{T\to\infty}{\longrightarrow}a_k\frac{G(k+1)^2}{G(2k+1)}\left(\log\frac{T}{2\pi}\right)^{k^2}\Leftrightarrow\int_{\mathrm{U}(N)}d\mu(U)\left|\det(\mathbb{I}-U)\right|^{2k}\overset{N\to\infty}{\longrightarrow}\frac{G(k+1)^2}{G(2k+1)}N^{k^2}$$

ζ 関数と量子力学

Gutzwiller 跡公式

$$\rho(E) = \mathrm{tr}\,\delta(E-\hat{H}) \xrightarrow{\mathrm{FT}} \sum_n \langle n|\mathrm{e}^{-it\hat{H}}|n\rangle = \int_{\boldsymbol{q}(t)=\boldsymbol{q}(0)} \mathcal{D}\boldsymbol{q}\,\mathrm{e}^{iS[\boldsymbol{q}]}$$

CUE$_\infty$

WKB 近似 $\Downarrow$ $\hat{H}$: ⊺-chaotic $\Uparrow$ Müller 2005

$$N_{\mathrm{fl}}(E) = \int^E dE' \left(\rho(E') - \bar{\rho}(E')\right) \simeq \frac{1}{\pi} \sum_{p\,:\,\text{素周期軌道}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\left(mS_p(E) - (m\pi/2)\mu_p\right)}{m\sqrt{\mathrm{e}^{m\lambda T_p}}}$$

Riemann 明示公式 ＝ “理想的” 量子カオス系

$$N_{\mathrm{fl}}(t) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\log\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = -\frac{1}{\pi}\sum_{p\,:\,\text{素数}} \mathrm{Im}\log(1-p^{-1/2-it})$$

$\boxed{{}^{\exists}\hat{H}_{\mathrm{HP}} : \text{⊺-chaotic}}$

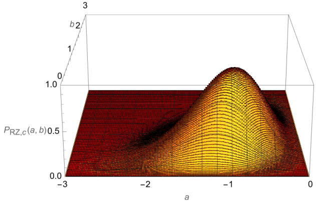
$$= -\frac{1}{\pi}\sum_{p\,:\,\text{素数}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(m\,t\log p)}{m\sqrt{\mathrm{e}^{m\log p}}} \overset{\text{予想}}{\Longrightarrow} \text{CUE}_\infty$$

素周期軌道 $\leftrightarrow$ 素数, $E \leftrightarrow t$, $S_p(E) \leftrightarrow t\log p$, $T_p = \frac{dS_p(E)}{dE} \leftrightarrow \log p$, $\lambda \leftrightarrow 1$ 対応

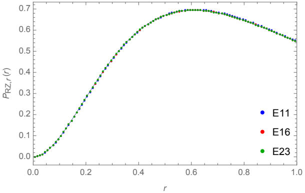
零点間隔比分布

ζ 零点: $\{\frac{1}{2} + i\gamma_n \mid n \in [N, N+10^{-3}N]$ or $[N, N+10^{9}]\}$ CUE$_\infty$ の結果と肉眼で不可分

N	γ_N	$\langle \tilde{r}_n \rangle$	$\langle \tilde{r}_n^2 \rangle$	$\langle \tilde{r}_n^3 \rangle$	$\langle \tilde{r}_n^4 \rangle$
10^8	$4.265354 \cdot 10^7$	.6032357	.4168926	.3133507	.2489623
10^9	$3.718702 \cdot 10^8$	.6021928	.4158748	.3125019	.2482868
10^{10}	$3.293531 \cdot 10^9$	.6014386	.4149925	.3116161	.2474310
$1.037 \cdot 10^{11}$	$3.058187 \cdot 10^{10}$	.6010277	.4145862	.3112812	.2471641
$1.304 \cdot 10^{16}$	$2.513274 \cdot 10^{15}$	.6000982	.4135805	.3103638	.2463557
10^{23}	$1.306643 \cdot 10^{22}$	.5998569	.4133196	.3101270	.2461487
	CUE$_\infty$	.5997504	.4132049	.3100223	.2460560

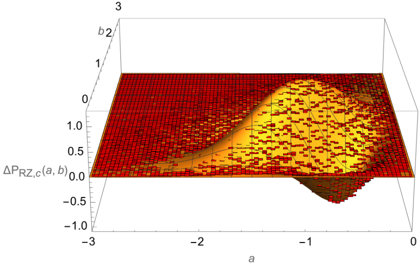


零点間隔の連結分布 $P_{\mathrm{c}}^{\mathrm{RZ}}(a,b)$



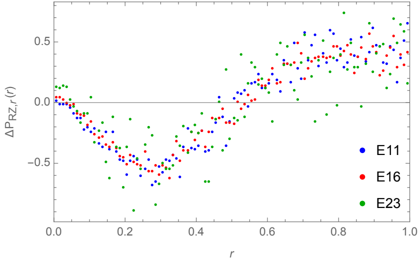
零点間隔比分布 $P_{\mathrm{r}}^{\mathrm{RZ}}(r)$

有限サイズ補正



零点間隔の連結分布の CUE_∞ からの偏差

$$N_{\mathrm{eff}}^2(P_{\mathrm{c}}^{\mathrm{RZ}}(a,b)-P_{\mathrm{c}}^{\sin}(a,b))$$



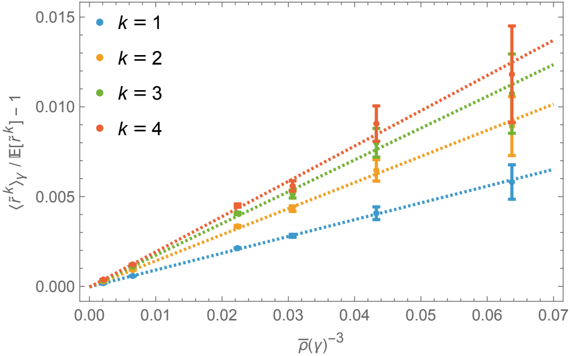
零点間隔比分布の CUE_∞ からの偏差

$$N_{\mathrm{eff}}^3(P_{\mathrm{r}}^{\mathrm{RZ}}(r)-P_{\mathrm{r}}^{\sin}(r))$$

偏差は $\mathcal{O}(N^{-2})$, CUE_N と一致 $\xrightarrow{\text{比}}$ 偏差は $\mathcal{O}(N^{-3})$, CUE_N と異なる

有限サイズ補正

零点間隔比のモーメント：CUE$_\infty$ からの偏差



$$\langle \tilde{r}^k \rangle_{\mathrm{RZ}} / \langle \tilde{r}^k \rangle_{\mathrm{CUE}_\infty} - 1 \ \propto \ \mathcal{O}(N_{\mathrm{eff}}^{-3}) \to 0$$

CUE$_N$ のギャップ比分布では $\mathcal{O}(N^{-2})$ 補正が消失 $\Rightarrow$ 偏差は $\mathcal{O}(N_{\mathrm{eff}}^{-3})$ でスケール

有限サイズ補正

Bogomolny-Keating 予想 1996

Riemann ζ 零点 $\{\frac{1}{2}+i\gamma_n|\gamma_n \approx T\}$ は核 $K_{\mathrm{RZ}}(x-y)$ をもつ DPP として分布する

$$K_{\mathrm{RZ}}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} + \frac{\pi x \sin \pi x}{6N_{\mathrm{eff}}^2} + \frac{Q}{\sqrt{3}\Lambda^{3/2}} \frac{(\pi x)^2 \cos \pi x}{6N_{\mathrm{eff}}^3} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{N_{\mathrm{eff}}^4}\Big)$$

$$N_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{\sqrt{12\Lambda}} \log \frac{T}{2\pi}, \quad \Lambda = 1.5731\ldots, \quad Q = 2.3158\ldots \text{ (素数和に由来)}$$

根拠：Hardy-Littlewood 素数対予想 $\rightarrow$ 周期軌道対と解釈して Gutzwiller 跡公式を適用

$$K_{\mathrm{CUE}}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} + \frac{\pi x \sin \pi x}{6N^2} + \frac{7(\pi x)^3 \sin \pi x}{360 N^4} + \cdots$$ にはない高次補正 $\mathcal{O}(N_{\mathrm{eff}}^{-3})$ を

ギャップ比分布の有限サイズ偏差 $N_{\mathrm{eff}}^3(P_{\mathrm{r}}^{\mathrm{RZ}}(r) - P_{\mathrm{r}}^{\sin}(r))$ で捕捉し BK 予想を確認

$\Rightarrow$ 量子カオス系の有限サイズ効果探索への, $P_{\mathrm{r}}(r)$ の (潜在的) 有用性

まとめ

- Jánossy 密度に対する Tracy-Widom PDE 系から, CUE_N の隣接準位間隔の連結分布・比分布を導出
- CUE_N の隣接準位間隔比では $\mathcal{O}(N^{-2})$ 補正が相殺し, $\mathcal{O}(N^{-4})$ が見える [左図]
  $\Rightarrow$ 量子カオス系の精緻な有限サイズ効果への窓口
- ζ 関数の隣接零点間隔比では $\mathcal{O}(N_{\mathrm{eff}}^{-2})$ 補正が相殺するが, $\mathcal{O}(N_{\mathrm{eff}}^{-3})$ が存在 [右図]
  $\Rightarrow$ BK 予想と整合