

離散的手法による場と時空のダイナミクス2025

明治学院大学 (白金キャンパス) 2025-09-09

E_8 格子の数理とJacobi形式

酒井 一博

(明治学院大学情報数理学部)

arXiv:2410.12907 [math.NT]

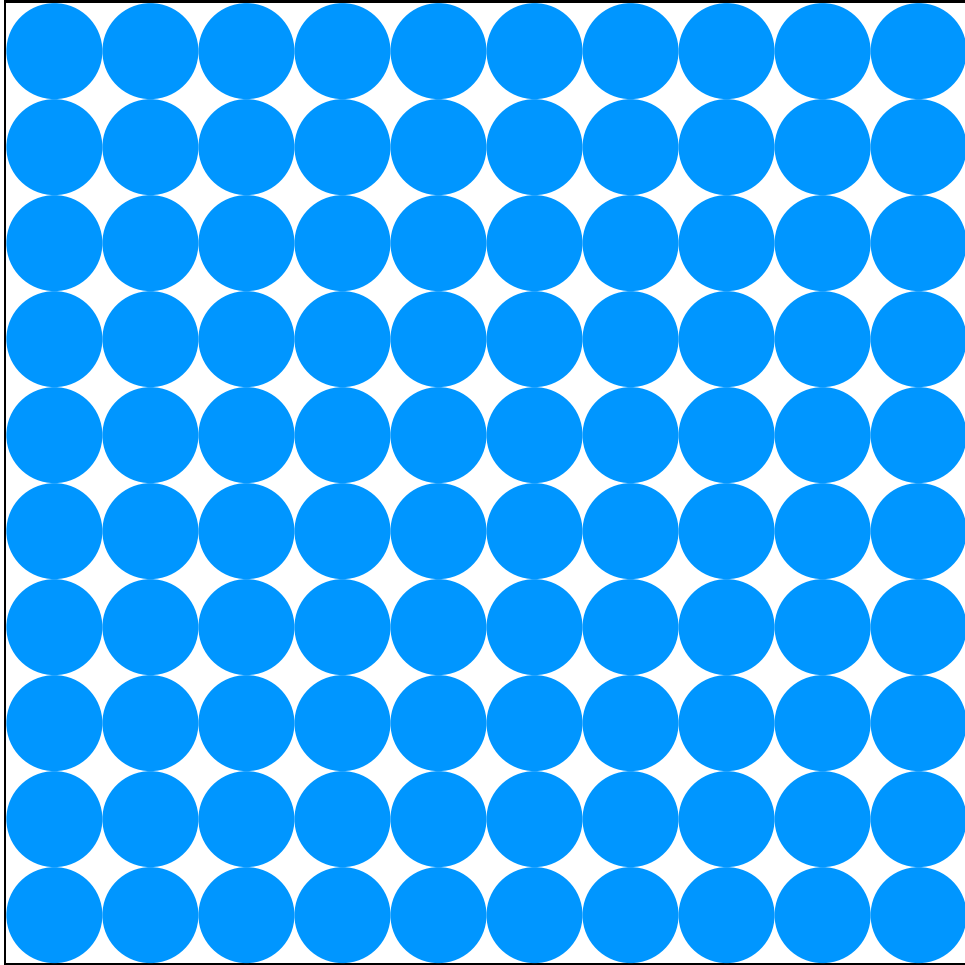
(2201.06895, 2504.00546)

今日の話の構成

- 前半： E_8 格子
 - ▶ 格子、球充填問題、誤り訂正符号、弦理論のつながり
- 後半：(Weyl群不変な) Jacobi形式
 - ▶ 超対称場の理論におけるよい変数
 - ▶ Weyl群の不変量、同次多項式の不変式
 - ▶ $W(E_8)$ 不変弱Jacobi形式のなす環の構造定理（今回の結果）

はじめに

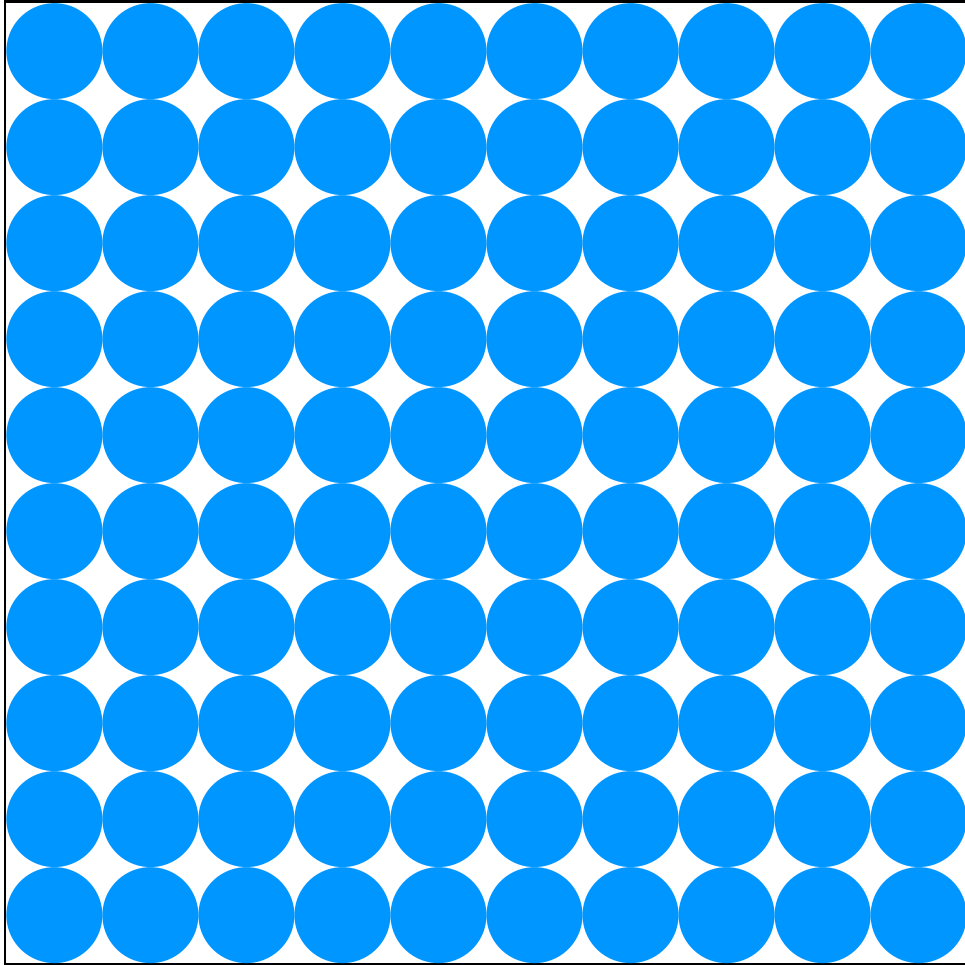
- $1\text{m} \times 1\text{m}$ の正方形内に、直径 10cm の円を重ならないように並べます。
最大何枚入りますか？



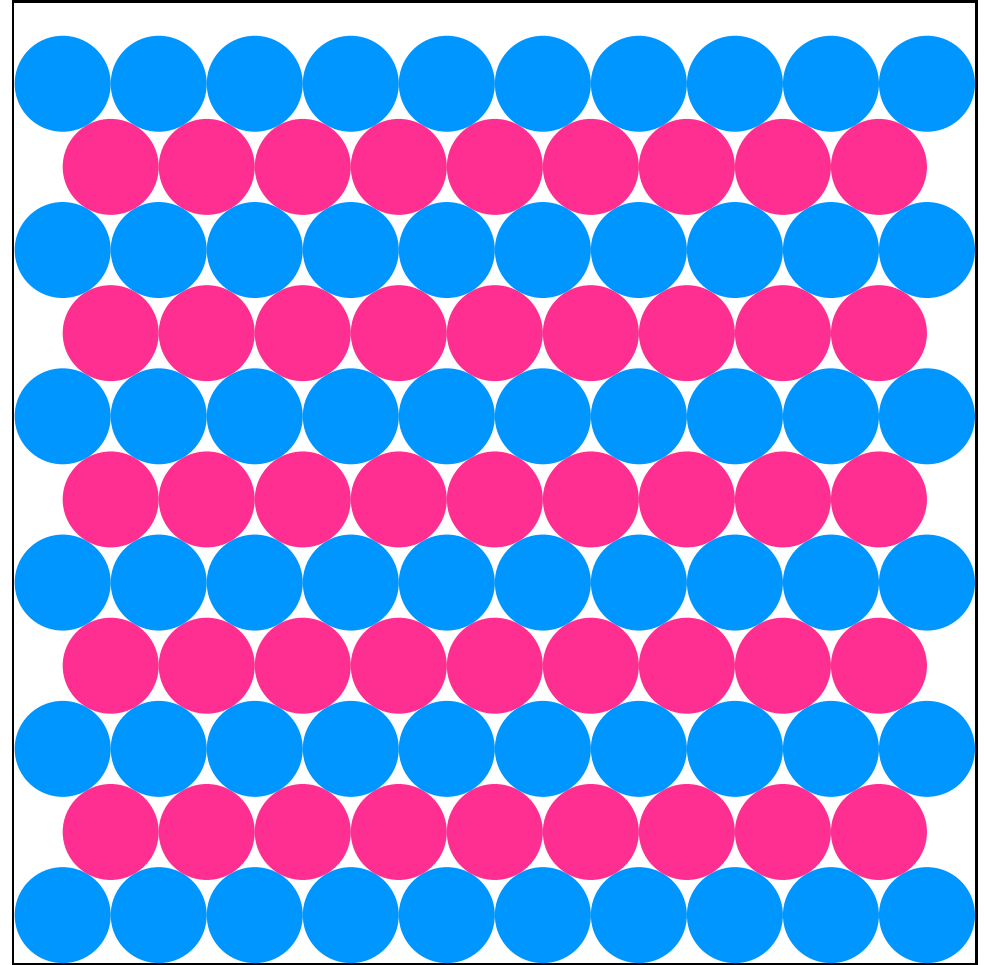
100個

はじめに

- $1\text{m} \times 1\text{m}$ の正方形内に、直径 10cm の円を重ならないように並べます。
最大何枚入りますか？



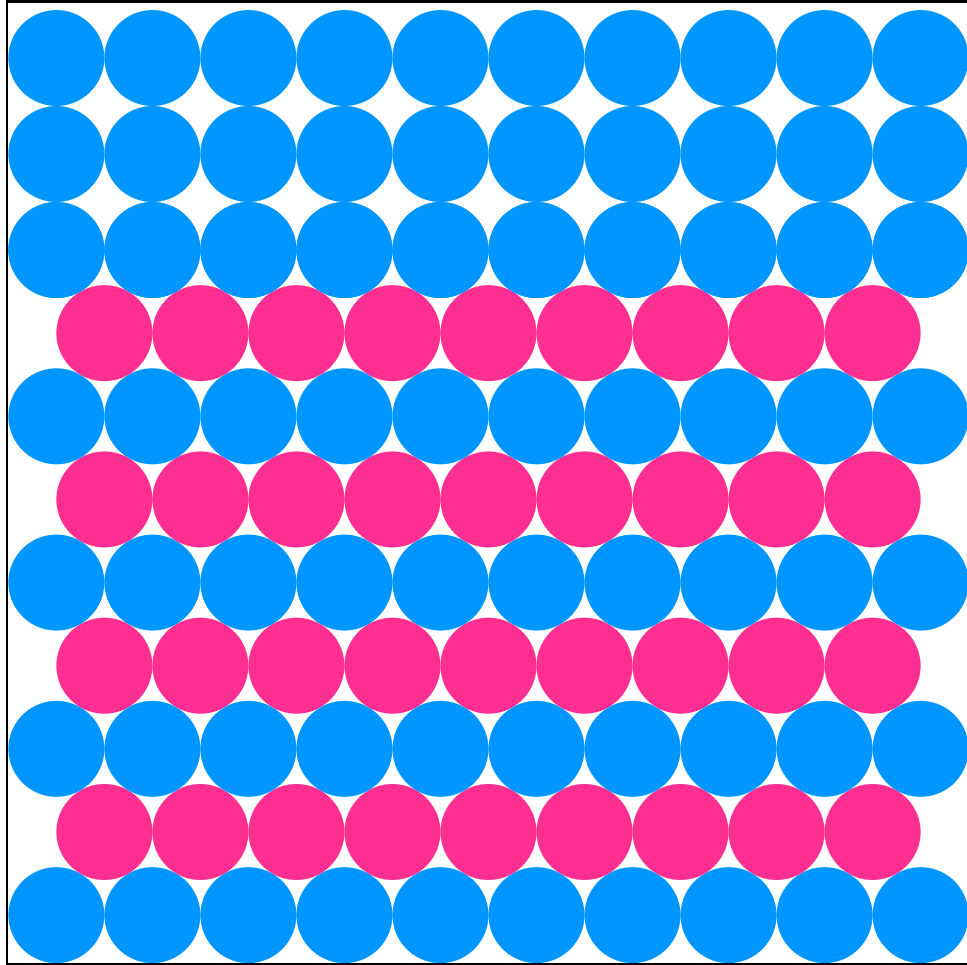
100個



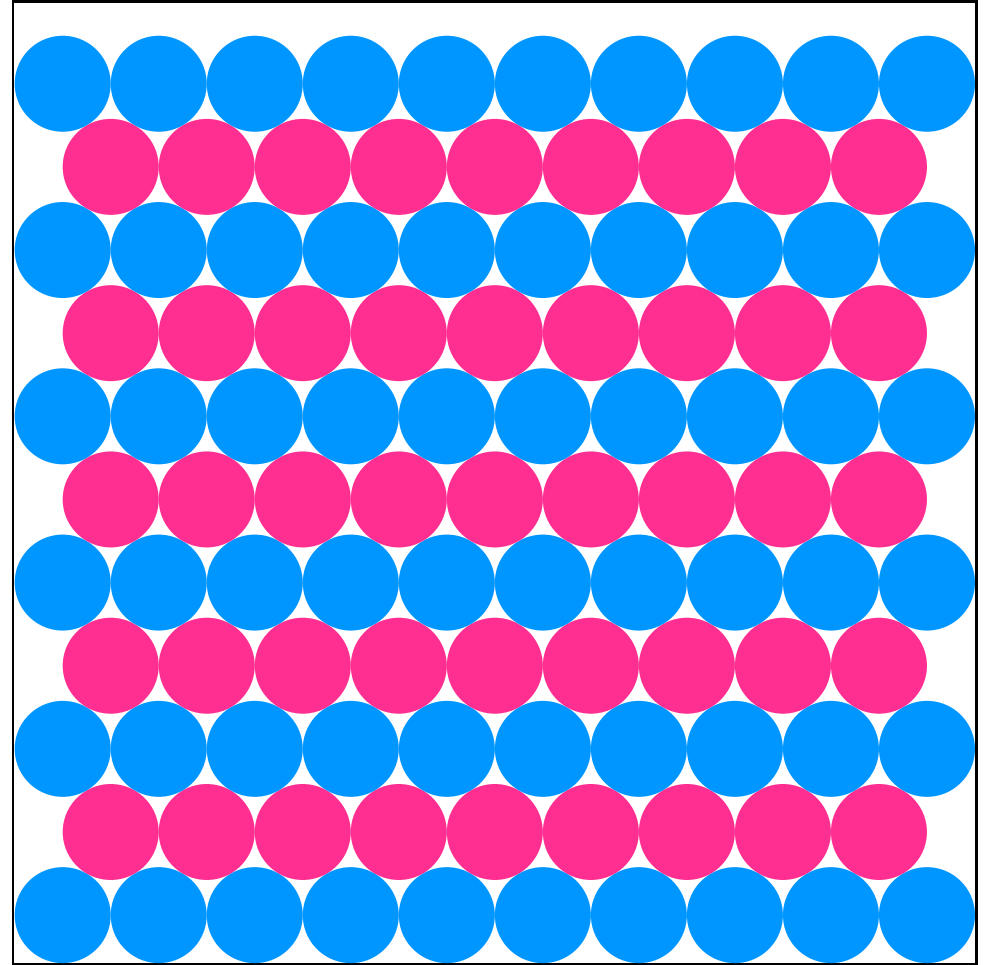
105個!

はじめに

- $1\text{m} \times 1\text{m}$ の正方形内に、直径 10cm の円を重ならないように並べます。
最大何枚入りますか？



106個!!



105個!

球充填問題 (sphere packing problem)

- 互いに重なり合わない同半径の超球を d 次元ユークリッド空間に詰め込むとき、密度の最大値、およびそれを実現する配置を求めよ。

超球の中心 (点) のなす集合を言えばよい

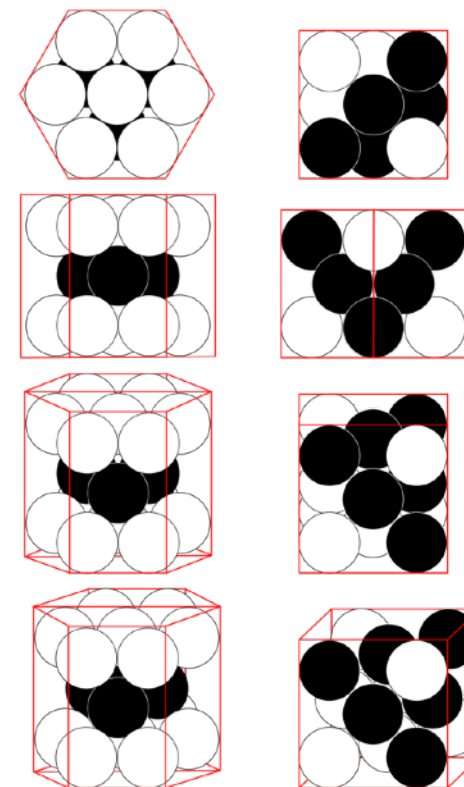
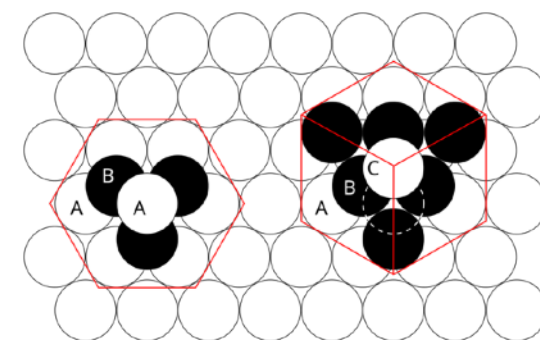
- $d = 1$: 整数格子

• • • • •

- $d = 2$: 六角格子

• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •

- $d = 3$: 面心立方格子、六方最密充填、...



球充填問題 — (少なくとも) Kepler (1611) 以来続く難問 —

- $d = 1, 2, 3, 8, 24$ の場合にしか解けていない！ (格子に限れば $d \leq 8, d = 24$)

次元	現時点での最密解	証明
1	$\mathbb{Z}$ (A_1 格子)	(自明)
2	A_2 格子	A. Thue (1890)? L. Tóth (1940)
3	A_3 格子 & 他無数	T. Hales (1998) [250 pages + computer]
4	D_4 格子	
5	D_5 格子 & 他無数	
6	E_6 格子 & 他無数	
7	E_7 格子 & 他無数	
8	E_8 格子	M. Viazovska (2016) [Fields Medal 2022]
9	D_9^+ 格子 & 他無数	
10	Bestの充填 (非格子)	
24	Leech格子	Cohn-Kumar-Miller-Radchenko-Viazovska (2016)

格子 (今回は正定値符号の格子のみ考える)

- 格子とは、ユークリッド空間内の離散的な点 (格子点) の集合で、格子点同士の和や差もまた格子点となるもの

$$\Lambda = \{m_1\vec{u}_1 + \cdots + m_n\vec{u}_n \mid m_i \in \mathbb{Z}\} \quad (\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\} : \mathbb{R}^n \text{の基底})$$

- 代表的な格子

$$A_n = \{\vec{x} \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid x_1 + \cdots + x_{n+1} = 0\}$$

$$A_1 \cong \mathbb{Z} \text{ (整数格子)}, \quad A_2 = \text{六角格子}, \quad A_3 = \text{面心立方格子}$$

$$D_n = \{\vec{x} \in \mathbb{Z}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = \text{even}\}$$

$$D_1 \cong A_1 \cong \mathbb{Z}, \quad D_2 \cong A_1 \oplus A_1, \quad D_3 \cong A_3$$

$$E_8 = \{\vec{x} \in \mathbb{Z}^8 \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})^8 \mid x_1 + \cdots + x_8 = \text{even}\}$$

(D_8 を2つ、あるいは A_8 を3つ、ずらして重ねたもの)

E_8 格子 — 特別な格子 —

- Even unimodular lattice
 - ▶ 格子点のノルム $\vec{x}^2$ が常に偶数 (even)
 - ▶ 格子の基底 $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d\}$ について $[\det(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d)]^2 = 1$ (unimodular)
- Even unimodular latticeは(正定値符号では) d が8の倍数のときのみ存在
 - $d = 8$: E_8
 - $d = 16$: $E_8 \oplus E_8, D_{16}^+$
 - $d = 24$: 24種類 (その内の1つがLeech格子)

誤り訂正符号

- ノイズが入る際のデータの通信や保存に用いられる
データに冗長性を持たせて送る

1011 → 11001111 ⇔ 11001011 → 1011? or 1001?

(これでは不十分 (誤りの検出はできる))

1011 → 111000111111 ⇔ 111000101111 → 1011!

(高い確率で誤りを訂正できる)

効率のよいやり方は？

- 例：(8,4) 拡張Hamming符号

000	00	000
000	01	111
001	10	011
001	11	100
010	10	101
010	11	010
011	00	110
011	01	001
100	10	110
100	11	001
101	00	101
101	01	010
110	00	011
110	01	100
111	10	000
111	11	111

- 4ビットのデータを8ビットの「符号語」に変換して送る

- 16個のどの符号語同士も最低4ビットずつ異なる

(2つの符号語間のHamming距離 (異なるビットの数) ≥ 4)

⇒ 1ビットの誤り訂正と2ビットまでの誤り検出が
同時に可能！

格子と誤り訂正符号

- 誤り訂正符号から格子を構成できる（その逆も可能）

例：(8,4) 拡張Hamming符号

00000000

00001111

00110011

00111100

01010101

01011010

01100110

01101001

10010110

10011001

10100101

10101010

11000011

11001100

11110000

11111111

符号語のいずれかと mod 2 で合同な $\mathbb{Z}^8$ の点の集合

$\Rightarrow E_8$ 格子（の $\sqrt{2}$ 倍）

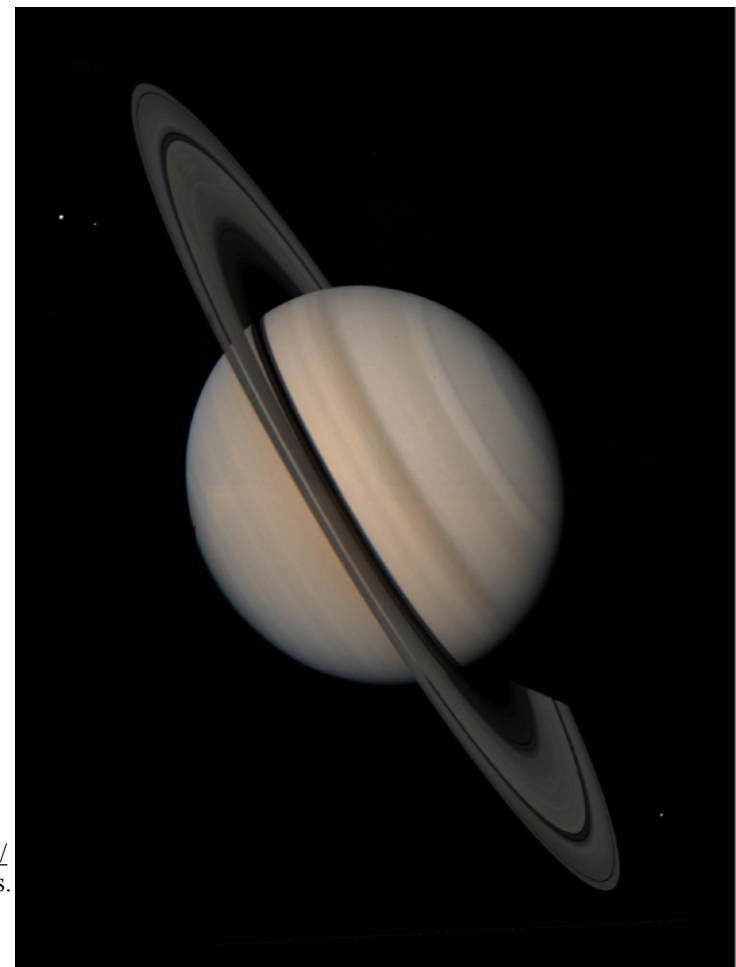
- 最小Hamming距離の最大化 $\Leftrightarrow$ 球充填

- Leech格子 ($d = 24$ の球充填問題の解) は

Golay符号を基に構成された

(J. Leech 1967; E. Witt 1940?)

<https://science.nasa.gov/image-detail/pia01383-3/>
Saturn and Moons Tethys, Enceladus, and Mimas.
Taken by NASA's Voyager 1 on Oct. 30, 1980.
IMAGE CREDIT: NASA/JPL-Caltech



弦理論

- 特殊相対論 × 量子論 = 場の量子論 (理論の枠組み)

素粒子の標準模型、大統一理論などは、この枠組みの上に構成される「模型」

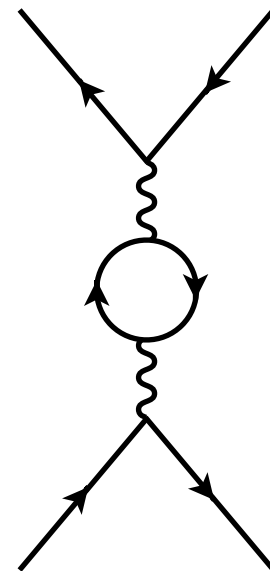
一般相対論 (重力) と量子論をどう融合させるか？

- 弦理論：「世界の基本構成要素は粒子ではなく弦である」ことのみにおいて場の量子論を修正する、最も保守的な量子重力理論

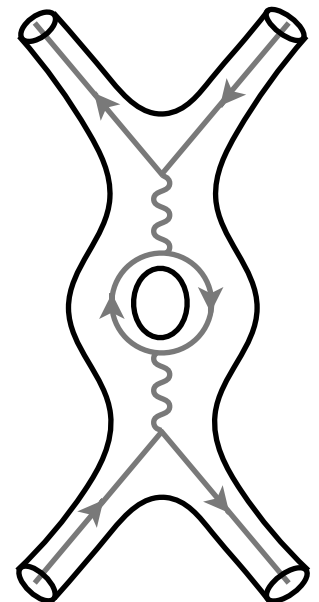
弦理論は、理論の枠組みであり、かつその上に構成される唯一の模型

(ただし未完成；実験での検証もない)

理論の整合性（無矛盾性）のみから
どこまで何ができるかを探る試み



粒子の理論



弦理論

量子異常(anomaly)と弦理論の時空の次元

- 量子異常：古典的に成り立つ対称性が量子論的に破れる現象

量子異常には、許されるものと禁止される(理論に矛盾を引き起こす)ものがある

弦理論では時空の次元 D によってLorentz対称性の量子異常が生じる
(これは許されない量子異常)



許される時空の次元は 26 (bosonic) または 10 (supersymmetric) のみ

- かなり端折った&論理的に飛躍のある説明 (bosonic stringの場合)：

弦の基底状態のエネルギー：

$$\underbrace{-1}_{\text{理論がゲージ場を含むためにはこの値が必要}} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{調和振動子の零点エネルギー}} \times \underbrace{(1 + 2 + 3 + \dots)}_{\substack{\text{N倍振動からの寄与} \\ (N=1,2,3,\dots)}} \times \underbrace{(D-2)}_{\text{横波の数}}$$
$$= \frac{1}{2} \times \zeta(-1) \times (D-2)$$
$$= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{12}\right) \times (D-2)$$

$$\therefore D = 26$$

調和振動子の
エネルギー

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$$
$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

Riemannゼータ関数

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

超弦理論と E_8 格子

- 純ボソンの弦理論 ($D=26$) ではタキオン (質量が負の粒子) が生じる
 $\Rightarrow$ 超対称性をもつ弦理論 (超弦理論) のみが生き残る
- 超弦理論：弦同士の相互作用が弱い状況で5種類の異なる姿をとる
(ただしこれらの5つは場の変数変換や背景時空の変形で互いにつながっている)

Type IIA	Type IIB	Type I	SO(32) heterotic	$E_8 \times E_8$ heterotic
----------	----------	--------	---------------------	-------------------------------

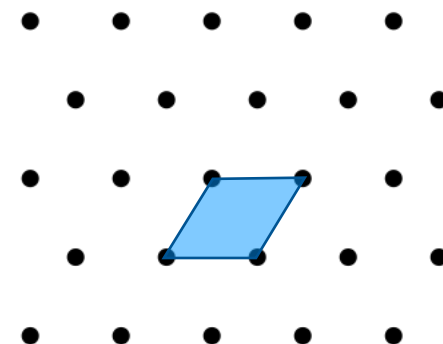
- 混成弦理論 (heterotic string theory) — 超弦理論の一つ (の姿)

閉弦の左向きモード：bosonic ($D=26$), 右向きモード：supersymmetric ($D=10$)

ただし、左向きの余剰な $26 - 10 = 16$ 次元空間はトーラスにコンパクト化しておく
(周期的境界条件を課しておく) 必要がある

このときのトーラスに対応する格子はeven unimodular
であることが必要

$$d = 16 : E_8 \oplus E_8, D_{16}^+$$



ここから後半

超対称場の理論と対称性不変な変数

- $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論

$$V(\phi) = \text{Tr}[\phi, \phi^\dagger]^2$$

ϕ : Higgs (随伴表現)

A_μ

$\lambda_\alpha \quad \psi_\alpha$

ϕ

$\phi \in \text{Cartan部分代数} \Rightarrow V = 0$ (平坦方向が存在: Coulomb branch)

例 : $\text{SU}(n)$

$$\phi = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} \quad (\mu_1 + \cdots + \mu_n = 0)$$

対角成分の入れ換えで物理は変わらない

$S_n = W(A_{n-1})$ の対称性が残っている

$$W(A_{n-1}) \subset \text{SU}(n)$$

Weyl群 (ルート鏡映のなす離散群)

$\Rightarrow$ 対角成分の対称多項式がよい変数

$W(A_{n-1})$ の不変多項式 ($\Leftrightarrow$ Casimir不変量)

多項式、三角関数、楕円関数

- Heisenberg XYZ model (spin chain)

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N [J_x \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + J_y \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + J_z \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z]$$

XXX model ($J_x = J_y = J_z$), XXZ model ($J_x = J_y$) の自然な拡張

- Seiberg-Witten理論：4次元 $\mathcal{N}=2$ ゲージ理論の低エネルギー厳密解
低エネルギーで4d $\mathcal{N}=2$ に見えていけばよい

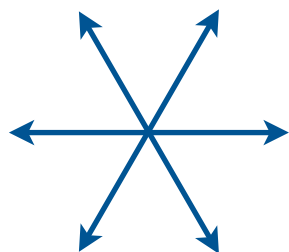
Heisenberg模型	XXX	XXZ	XYZ
Seiberg-Witten 理論	4d $\mathcal{N}=2$	5d $\mathcal{N}=1$ on $\mathbb{R}^4 \times S^1$	6d (1,0) on $\mathbb{R}^4 \times T^2$
変数依存性	多項式的	三角関数的 (指数関数的)	楕円関数的

- XXXよりXXZ, 4d $\mathcal{N}=2$ より5d $\mathcal{N}=1$ の方が“自然・簡単” (縮退が解消)
- XYZ, 6d (1,0) は自然な終着地 (mother theory)

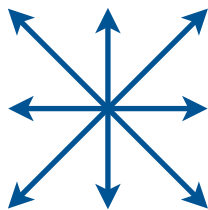
$W(R)$ 不変量

- 以下では既約なルート系 R を考える ($\Leftrightarrow$ 単純Lie代数)

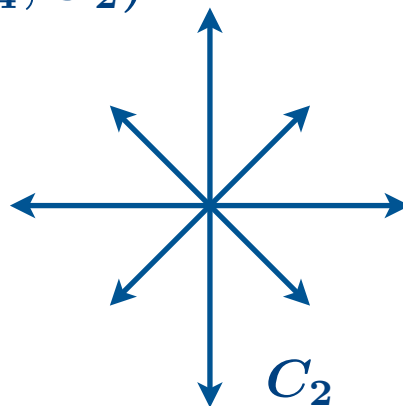
($R = A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$)



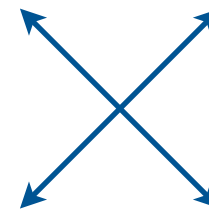
A_2



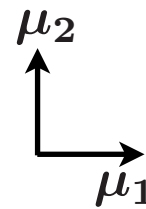
B_2



C_2



D_2



- Weyl群 $W(R)$: ルートによる鏡映のなす離散群 $\vec{\mu}$: ルート空間の座標
- $W(R)$ の多項式的不変量: 不変多項式 $p_j(\vec{\mu})$

$$\prod_{\text{all roots } \vec{\alpha}} (1 - t\vec{\alpha} \cdot \vec{\mu}) = \sum_j p_j(\vec{\mu}) t^j$$

- $W(R)$ の三角関数的不変量: 対応するLie代数の表現 ρ の指標(character)

$$\chi_\rho(\vec{\mu}) = \sum_{\vec{w} \in \rho} \exp(2\pi i \vec{w} \cdot \vec{\mu})$$

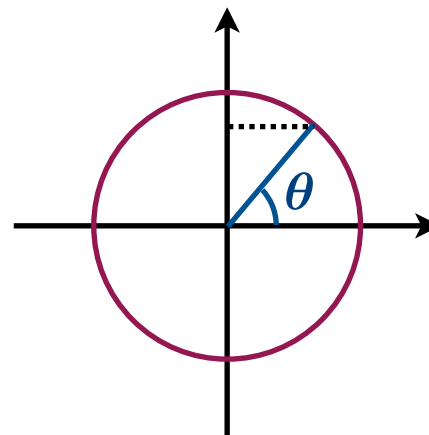
- $W(R)$ の楕円関数的不変量: $W(R)$ 不変Jacobi形式

楕円関数

- 三角関数 — 周期関数

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$$

円周上の関数とみなせる



- 楕円関数 — 2重周期関数

- 例：Weierstrassの楕円関数

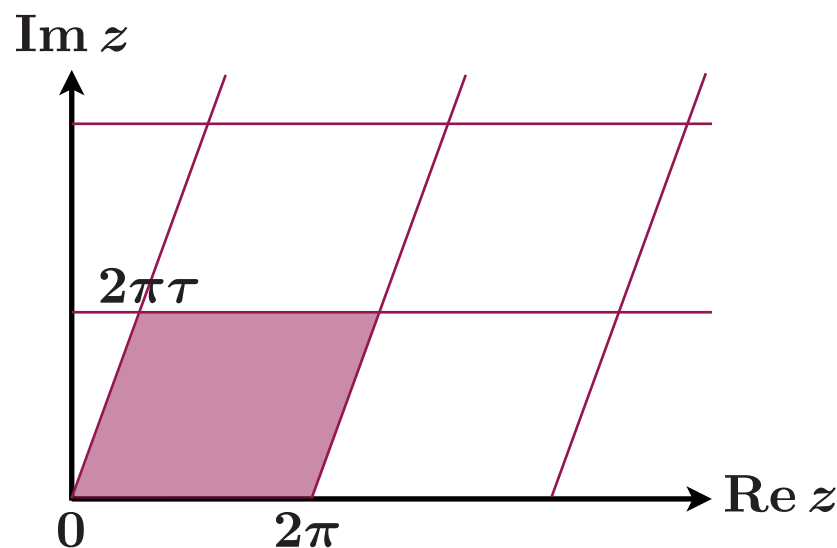
$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2_{\neq(0,0)}} \left[\frac{1}{(z - \Omega_{m,n})^2} - \frac{1}{\Omega_{m,n}^2} \right], \quad \Omega_{m,n} = 2\pi(m + n\tau)$$

$$\wp(z + 2\pi) = \wp(z)$$

$$\wp(z + 2\pi\tau) = \wp(z)$$

2次元トーラス上の関数とみなせる

τ : トーラスのモジュラス



モジュラー形式

- Weierstrassの楕円関数は次の微分方程式を満たす：

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - \frac{1}{12}E_4(\tau)\wp(z) - \frac{1}{216}E_6(\tau)$$

- Eisenstein級数

$$E_{2k}(\tau) = \frac{1}{2\zeta(2k)} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}_{\neq(0,0)}^2} \frac{1}{(m + n\tau)^{2k}}$$

Eisenstein級数 $E_{2k}(\tau)$ ($k \geq 2$) はモジュラー形式の例

- モジュラー形式

以下の性質を満たす関数 $f(\tau)$ をウェイト $2k$ のモジュラー形式という

(i) 上半平面 $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \tau > 0\}$ で正則

(ii) 次の2条件が成り立つ：

$$f(\tau + 1) = f(\tau), \quad f\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^{2k} f(\tau)$$

(iii) 無限遠点 $\tau = i\infty$ で正則、すなわち次のFourier展開形を持つ

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n, \quad q = e^{2\pi i \tau}$$

テータ級数、Jacobi形式

- 格子に対してテータ級数が定義できる

$$\Theta_{\Lambda}(\tau) := \sum_{\vec{x} \in \Lambda} e^{\pi i \tau \vec{x}^2}$$

E_8 格子のテータ級数はウェイト4のEisenstein級数を与える！

$$\Theta_{E_8}(\tau) = E_4(\tau)$$

(より一般に、even unimodular latticeのテータ級数はモジュラー形式となる)

- テータ級数に化学ポテンシャルを入れることもできる

$$\Theta_{E_8}(\tau, \vec{\mu}) := \sum_{\vec{x} \in E_8} e^{\pi i \tau \vec{x}^2 + 2\pi i \vec{\mu} \cdot \vec{x}}$$

これはJacobi形式の例

- Jacobi形式：正則関数 $\varphi(\tau, z)$ ($\tau \in \mathbb{H}, z \in \mathbb{C}$) (Eichler-Zagier '85)

τ に関するモジュラー性、 z に関する準二重周期性をあわせ持つ

弦理論や場の量子論の分配関数を組み立てる構成要素として重要

Jacobi形式

(Eichler-Zagier '85)

- 以下の条件を満たす正則関数 $\varphi(\tau, z)$ ($\tau \in \mathbb{H}$, $z \in \mathbb{C}$) を weight k , index m の Jacobi 形式という。

i) モジュラー変換性

$$\varphi\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k \exp\left(2\pi i m \frac{cz}{c\tau + d}\right) \varphi(\tau, z), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$$

ii) 準二重周期性

$$\varphi(\tau, z + \alpha\tau + \beta) = e^{-2\pi i m(\alpha^2\tau + 2\alpha z)} \varphi(\tau, z), \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$$

iii) 次の Fourier 展開形をもつ：

$$\varphi(\tau, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r^2 \leq 4nm}} c(n, r) q^n \zeta^r, \quad q = e^{2\pi i \tau}, \quad \zeta = e^{2\pi i z}$$

$r^2 \leq 4nm$ (この条件を外したものは、弱 Jacobi 形式という)

$$\left(\text{例) } \phi_{10,1}(\tau, z) = \eta(\tau)^{18} \vartheta_1(z, \tau)^2, \quad \phi_{12,1}(\tau, z) = 4\eta(\tau)^{24} \sum_{k=1}^4 \frac{\vartheta_k(z, \tau)^2}{\vartheta_k(0, \tau)^2} = 12\wp(z) \phi_{10,1}(\tau, z) \right)$$

楕円関数 (完全二重周期性 / 極を持つ) $\leftrightarrow$ Jacobi 形式 (準二重周期性 / 正則)

$W(R)$ 不変弱Jacobi形式

(Wirthmüller '92)

- 以下の条件を満たす正則関数 $\varphi(\tau, \vec{\mu})$ ($\tau \in \mathbb{H}$, $\vec{\mu} \in \mathbb{C}^n$) を、weight k , index m ($k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$) の $W(R)$ 不変弱Jacobi形式という。

i) Weyl群不変性

$$\varphi_{k,m}(\tau, w(\vec{\mu})) = \varphi_{k,m}(\tau, \vec{\mu}), \quad w \in W(R).$$

Weyl group of R

R : root system

ii) 準二重周期性

$$\varphi_{k,m}(\tau, \vec{\mu} + \tau \vec{\alpha} + \vec{\beta}) = e^{-m\pi i(\tau \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\mu} \cdot \vec{\alpha})} \varphi_{k,m}(\tau, \vec{\mu}), \quad \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in L_R.$$

root lattice of R

iii) モジュラー変換性

$$\varphi_{k,m}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{\vec{\mu}}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k \exp\left(m\pi i \frac{c}{c\tau + d} \vec{\mu}^2\right) \varphi_{k,m}(\tau, \vec{\mu}),$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}).$$

iv) $\varphi_{k,m}(\tau, \vec{\mu})$ は次のFourier展開形をもつ：

$$\varphi_{k,m}(\tau, \vec{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\vec{w} \in L_R^*} c(n, \vec{w}) e^{2\pi i(n\tau + \vec{w} \cdot \vec{\mu})}.$$

dual lattice of L_R

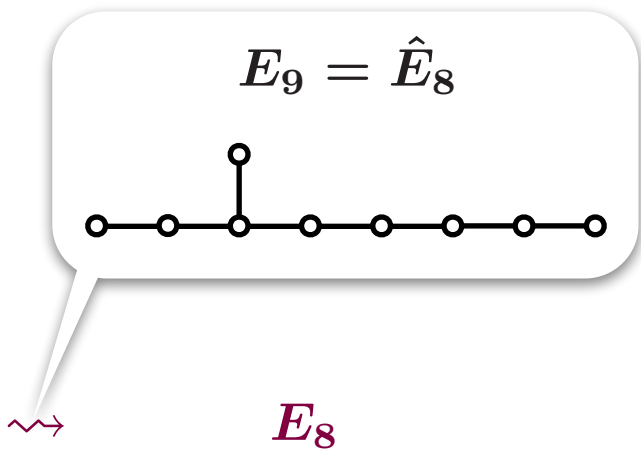
$W(R)$ 不変量のなす環

- $W(R)$ 不変量：分配関数等の物理量を記述する際の基本構成要素
— どれだけあるか？（どうすれば、構成し尽くせるか？）
- 多項式的／三角関数的／楕円関数的 $W(R)$ 不変量の全体は、それぞれ $\mathbb{C}$ 上の環をなす。
- ▶ $W(R)$ の不変多項式環：全ての既約な R について、多項式環
あらゆる不変多項式は $\text{rank}(R)$ 個の生成元が多項式として書ける
(Chevalley-Shephard-Toddの定理)
- ▶ $W(R)$ の指標環： 全ての既約な R について、多項式環
あらゆる有限次元表現の指標は $\text{rank}(R)$ 個の基本表現の指標が多項式として書ける
- ▶ $W(R)$ 不変Jacobi形式の環： E_8 を除く既約な R について、多項式環
 $R \neq E_8$ ：あらゆる $W(R)$ 不変Jacobi形式は $\text{rank}(R)+1$ 個の生成元が多項式として書ける
(Wirthmüllerの定理(1992))
- $W(E_8)$ 不変Jacobi形式の環の構造は？

フレーバー対称性の拡大

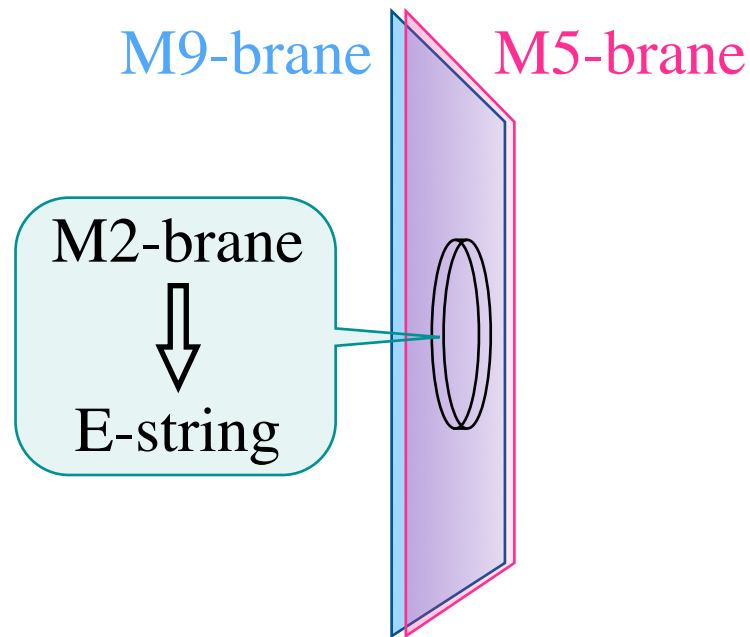
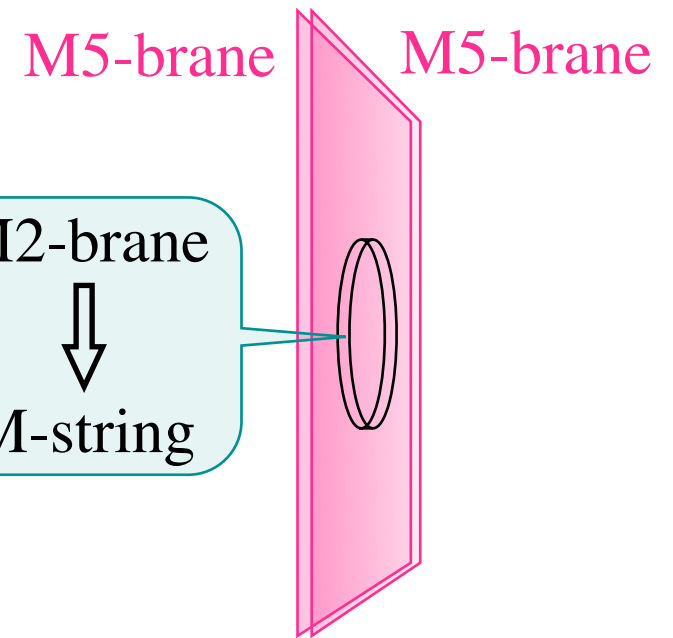
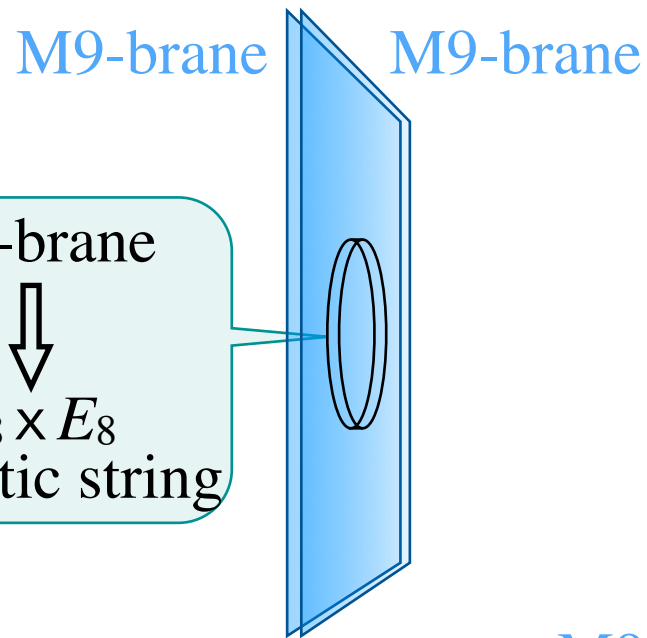
(Seiberg '96)

- 4d $\mathcal{N}=2$ SU(2)ゲージ理論に基本表現物質場を加えてゆく際のフレーバー対称性の変化

	4d $\mathcal{N}=2$ on $\mathbb{R}^4$	5d $\mathcal{N}=1$ on $\mathbb{R}^4 \times S^1$	6d (1,0) on $\mathbb{R}^4 \times T^2$
$N_f = 1$	$SO(2) = D_1$		
$N_f = 2$	$SO(4) = D_2$		
$N_f = 3$	$SO(6) = D_3$		
$N_f = 4$	$SO(8) = D_4$	$SO(10) = E_5$	
$N_f = 5$		E_6	
$N_f = 6$		E_7	
$N_f = 7$		E_8	
$N_f = 8$		$E_9?$	 The diagram shows a horizontal line of 8 nodes. A callout box points to the 3rd node from the left, containing the text $E_9 = \hat{E}_8$ and a vertical line segment ending in a node.

- E_8 対称性、楕円関数的パラメータ依存性が自然に(意図せずに)現れる

E弦理論 (Ganor-Hanany '96) (Seiberg-Witten '96)



- E弦理論：最も基本的な6d (1,0)超対称共形場理論(のひとつ)

Seiberg-Witten theory

(Seiberg-Witten '94)

- Exact solution to the low energy theory of 4d $\mathcal{N}=2$ SYM

Low energy effective Lagrangian

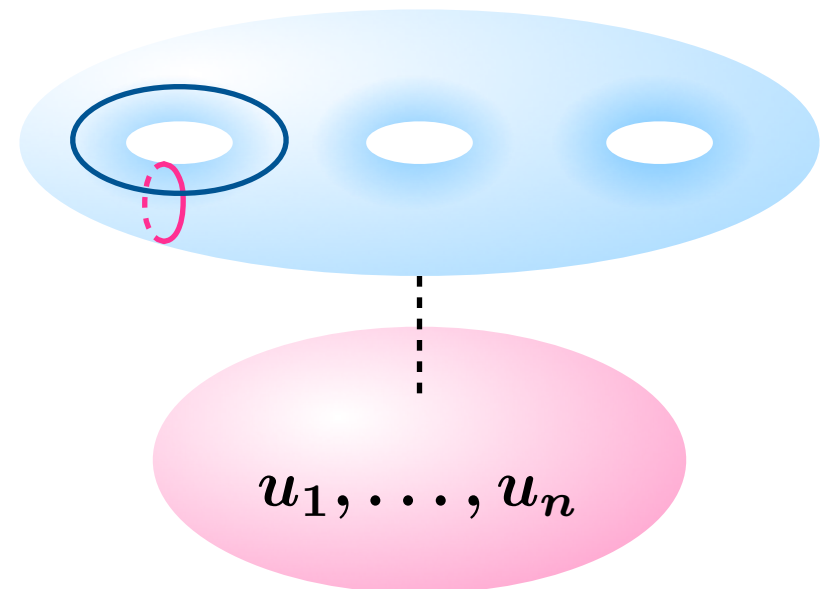
$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{4\pi} \text{Im} \left[\int d^4\theta \frac{\partial F_0(A)}{\partial A^i} \bar{A}^i + \int d^2\theta \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_0(A)}{\partial A^i \partial A^j} W_\alpha^i W^{\alpha j} \right]$$

prepotential $F_0(a_1, \dots, a_n)$: holomorphic function

Seiberg-Witten curve

λ_{SW} : Seiberg-Witten differential

$$a_i = \oint_{\alpha_i} \lambda_{\text{SW}}, \quad \frac{\partial F}{\partial a_i} = \oint_{\beta_i} \lambda_{\text{SW}}$$



Seiberg-Witten curve for the E-string theory

(Eguchi-KS '02)

(KS '11)

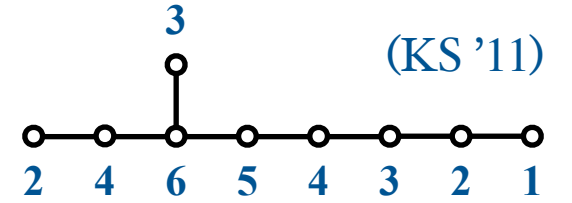
$$y^2 = 4x^3 - (a_0u^4 + a_1u^3 + a_2u^2 + a_3u + a_4)x \\ - (b_0u^6 + b_1u^5 + b_2u^4 + b_3u^3 + b_4u^2 + b_5u + b_6)$$

with

$$a_0 = \frac{E_4}{12}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{6}{E_4\Delta}(-E_4A_2 + A_1^2), \\ a_3 = \frac{1}{9E_4^2\Delta^2}(-7E_4^2E_6A_3 - 20E_4^3B_3 - 9E_4E_6A_1A_2 + 30E_4^2A_1B_2 + 6E_6A_1^3), \\ b_0 = \frac{E_6}{216}, \quad b_1 = -\frac{4}{E_4}A_1, \quad b_2 = \frac{5}{6E_4^2\Delta}(E_4^2B_2 - E_6A_1^2), \\ b_3 = \frac{1}{108E_4^3\Delta^2}(-7E_4^5A_3 - 20E_4^3E_6B_3 \\ - 9E_4^4A_1A_2 + 30E_4^2E_6A_1B_2 + (16E_4^3 - 10E_6^2)A_1^3), \quad \dots$$

$$(\Delta := \eta^{24})$$

Nine basic $W(E_8)$ -invariant Jacobi forms



$$\Theta(\tau, \vec{\mu}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \prod_{j=1}^8 \vartheta_k(\mu_j, \tau)$$

Theta function associated with the E_8 lattice

$$A_2(\tau, \vec{\mu}) = \frac{8}{9} \mathcal{H} \{ \Theta(2\tau, 2\vec{\mu}) \},$$

$$A_1(\tau, \vec{\mu}) = \Theta(\tau, \vec{\mu}),$$

$$A_3(\tau, \vec{\mu}) = \frac{27}{28} \mathcal{H} \{ \Theta(3\tau, 3\vec{\mu}) \},$$

$$A_4(\tau, \vec{\mu}) = \Theta(\tau, 2\vec{\mu}),$$

$$A_5(\tau, \vec{\mu}) = \frac{125}{126} \mathcal{H} \{ \Theta(5\tau, 5\vec{\mu}) \},$$

$$B_2(\tau, \vec{\mu}) = \frac{32}{5} \mathcal{H} \{ e_1(\tau) \Theta(2\tau, 2\vec{\mu}) \},$$

$$B_3(\tau, \vec{\mu}) = \frac{81}{80} \mathcal{H} \{ h(\tau)^2 \Theta(3\tau, 3\vec{\mu}) \},$$

$$B_4(\tau, \vec{\mu}) = \frac{16}{15} \mathcal{H} \{ \vartheta_4(2\tau)^4 \Theta(4\tau, 4\vec{\mu}) \},$$

$$B_6(\tau, \vec{\mu}) = \frac{9}{10} \mathcal{H} \{ h(\tau)^2 \Theta(6\tau, 6\vec{\mu}) \}.$$

$\mathcal{H} \{ \cdot \}$: sum of all possible $\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ transforms

$$e_1(\tau) = \frac{1}{12} (\vartheta_3(\tau)^4 + \vartheta_4(\tau)^4),$$

$$A_n(\tau, \vec{0}) = E_4,$$

$$h(\tau) = \vartheta_3(2\tau)\vartheta_3(6\tau) + \vartheta_2(2\tau)\vartheta_2(6\tau).$$

$$B_n(\tau, \vec{0}) = E_6.$$

$W(E_8)$ 不変Jacobi形式の環に関する進展

- $E_4, E_6, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, B_2, B_3, B_4, B_6$ は $\mathbb{C}$ 上で $W(E_8)$ 不変弱Jacobi形式の環を生成するか？

Observation (Huang-Klemm-Poretschkin 2013)

index ≥ 5 では上で生成されない $W(E_8)$ 不変弱Jacobi形式が存在する。

Theorem (Sun-Wang 2021), based on Conjecture (Del Zotto et. al. 2017)

あらゆる $W(E_8)$ 不変弱Jacobi形式は一意的に次の形に書ける：

$$\frac{1}{\Delta^{N_t}} \left[\sum_{j=0}^{t_1-1} \left(\frac{P_{16,5}}{E_4} \right)^{t_1-j} P_j(E_6, A_i, B_i) + P_{t_j}(E_4, E_6, A_i, B_i) \right]$$

- Seiberg-Witten curveの係数 a_i, b_j — ほとんど $W(E_8)$ 不変弱Jacobi形式 $E_4(\tau)$ は $\tau = e^{2\pi i/3}$ に零点をもつ $\rightarrow$ 分母の E_4 が a_i, b_j に極をもたらす

Conjecture (KS 2017) $\rightarrow$ Theorem (KS 2022)

あらゆる $W(E_8)$ 不変弱Jacobi形式は a_i, b_j の多項式で書ける：

$$J_{*,*}^{E_8} \subsetneq \mathbb{C}[a_0, a_2, a_3, a_4, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6].$$

$W(E_8)$ 不変Jacobi形式： a_i, b_j による表示

- **Observation:** 低いweightの $W(E_8)$ 不変Jacobi形式は、E弦理論の Seiberg-Witten curve

$$y^2 = 4x^3 - f(u)x - g(u)$$

$$f(u) = a_0u^4 + a_2u^2 + a_3u + a_4, \quad g(u) = b_0u^6 + b_1u^5 + \cdots + b_6$$

の係数 a_i, b_j を用いて表す方が、簡単に書ける!?

例1) weight -16, index 4: 独立な元の数=1

$$\frac{1}{864\Delta^3}(-192E_4A_1^4 + 144E_4^2A_1^2A_2 + 56E_4^3A_1A_3 - 9E_4^3A_2^2 + E_4^4A_4 + 240E_6A_1^2B_2 \\ - 56E_6^2A_1A_3 - 18E_6^2A_2^2 - 90E_4E_6A_2B_2 - E_4E_6^2A_4 - 75E_4^2B_2^2)$$

$$= a_2^2 + 12a_0a_4 \quad : f(u)の2次の不変式$$

例2) weight -24, index 6: 独立な元の数=2

$$2a_2^3 + 27a_0a_3^2 - 72a_0a_2a_4, \quad : f(u)の3次の不変式$$

$$3b_3^2 - 8b_2b_4 + 20b_1b_5 - 120b_0b_6 : g(u)の2次の不変式$$

これは何だろうか？

2変数同次式の不変式 (invariants of a binary form)

- 2変数 n 次同次多項式

$$f(u, v) = \alpha_0 u^n + \alpha_1 u^{n-1} v + \cdots + \alpha_n v^n$$

に対し、 $T \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の作用を以下で定める：

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$f'(u, v) = \alpha'_0 u^n + \alpha'_1 u^{n-1} v + \cdots + \alpha'_n v^n := f(u', v')$$

(以下では $'$ で T の作用を表す： $\alpha'_i = T\alpha_i$, etc.)

- 係数 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ の d 次同次多項式 $\Phi(\alpha_i)$ が、
任意の $T \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の作用に対して

$$\Phi(\alpha'_i) = \Phi(\alpha_i)$$

を満たすとき、 Φ を f の d 次不変式 という。

$$\left(\begin{array}{l} \text{例) } f = au^2 + buv + cv^2 \\ \text{に対し、判別式} \\ D = b^2 - 4ac \\ \text{は2次の不変式} \end{array} \right)$$

2変数同次式の共変式 (covariants of a binary form)

- 同次式 $f(u, v) = \alpha_0 u^n + \alpha_1 u^{n-1}v + \cdots + \alpha_n v^n$ に対し、以下の全ての条件を満たす多項式 $\Psi(\alpha_i; u, v)$ を、

degree d , order ω の共変式 という。

- (i) Ψ は係数 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ について d 次の同次式
- (ii) Ψ は変数 u, v について ω 次の同次式
- (iii) Ψ は任意の $T \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の作用に対して次を満たす：

$$\Psi(\alpha'_i; u, v) = \Psi(\alpha_i; u', v')$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{例1) } f(u, v) \text{ それ自身は degree 1, order } n \text{ の共変式} \\ \text{例2) } f(u, v) \text{ の Hessian} \\ \qquad \qquad \qquad H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{vmatrix} \\ \text{は degree 2, order } 2n - 4 \text{ の共変式} \end{array} \right)$$

- 註：order 0 の共変式は不変式

2変数同次式の半不変式 (semiinvariants of a binary form)

- 同次式 $f(u, v) = \alpha_0 u^n + \alpha_1 u^{n-1}v + \cdots + \alpha_n v^n$ に対し、以下の全ての条件を満たす多項式 $\Phi(\alpha_i)$ を、

degree d , order ω の半不変式という。

- (i) Φ は係数 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ について d 次の同次式
- (ii) Φ は任意の $T = \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の作用に対して
$$\Phi(\alpha'_i) = \Phi(\alpha_i)$$
- (iii) Φ は任意の $T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の作用に対して
$$\Phi(\alpha'_i) = \lambda^\omega \Phi(\alpha_i)$$

- 註：order 0の半不変式は不変式

Roberts isomorphism

(Roberts 1861)

- 共変式 Ψ の展開

$$\Psi(\alpha_i; u, v) = \Psi_0(\alpha_i)u^\omega + \Psi_1(\alpha_i)u^{\omega-1}v + \cdots + \Psi_\omega(\alpha_i)v^\omega$$

の初項の係数 Ψ_0 は半不変式。

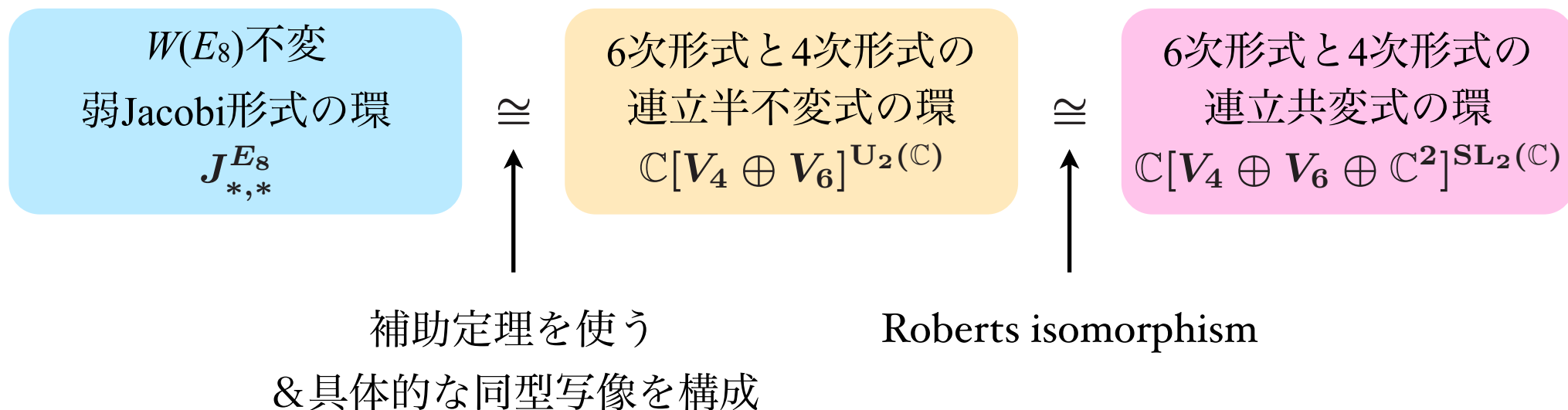
- 逆に、与えられた半不変式 Ψ_0 に対して、対応する共変式 Ψ が構成できる。
- この対応により、共変式のなす環と半不変式のなす環は同型。

$W(E_8)$ 不変Jacobi形式の環の構造定理

定理 (KS 2024)

$W(E_8)$ 不変弱Jacobi形式のなす環は、2変数6次形式と4次形式の連立共変式のなす環に同型である。

• 証明の概略



補助定理 (KS 2024)

$$J_{*,*}^{E_8} = R \cap \tilde{R}$$

$$\left(\begin{array}{l} V_n: n\text{次形式の}\mathbb{C}\text{ベクトル空間} \\ U_2(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \kappa \in \mathbb{C} \right\} \end{array} \right)$$

補助定理

- Seiberg-Witten curveには2通りの自然な書き方がある $\left(u = \tilde{u} - \frac{b_1}{6b_0}\right)$

$$\begin{aligned} f &= a_0 u^4 + a_2 u^2 + a_3 u + a_4 & g &= b_0 u^6 + b_1 u^5 + b_2 u^4 + \cdots + b_6 \\ &= c_0 \tilde{u}^4 + c_1 \tilde{u}^3 + c_2 \tilde{u}^2 + c_3 \tilde{u} + c_4 & &= d_0 \tilde{u}^6 + d_2 \tilde{u}^4 + \cdots + d_6 \end{aligned}$$

前出の定理 (KS 2022) より

$$J_{*,*}^{E_8} \subsetneq R = \mathbb{C}[a_0, a_2, a_3, a_4, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6]$$

(a_i, b_j は E_4 の零点で極をもち得る以外は $W(E_8)$ 不変弱Jacobi形式)

であった。同様に以下が成り立つ：

$$J_{*,*}^{E_8} \subsetneq \tilde{R} = \mathbb{C}[c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, d_0, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6]$$

(c_i, d_j は E_6 の零点で極をもち得る以外は $W(E_8)$ 不変弱Jacobi形式)

補助定理 (KS 2024)

$$J_{*,*}^{E_8} = R \cap \tilde{R}$$

換言すれば、以下の2条件は同値：

- (i) φ は $W(E_8)$ 不変Jacobi形式
- (ii) φ は a_i, b_j の多項式かつ c_i, d_j の多項式

同型写像（以下の内容が証明できる）

- 4次形式と6次形式

$$f = \sum_{i=0}^4 \alpha_i u^{4-i} v^i, \quad g = \sum_{i=0}^6 \beta_i u^{6-i} v^i$$

の係数 α_i, β_j に関する次の有理式を導入する：

$$\begin{aligned} \hat{a}_i &= \sum_{j=0}^i \alpha_j \binom{4-j}{4-i} \left(-\frac{\alpha_1}{4\alpha_0}\right)^{i-j}, & \hat{b}_i &= \sum_{j=0}^i \beta_j \binom{6-j}{6-i} \left(-\frac{\alpha_1}{4\alpha_0}\right)^{i-j}, \\ \hat{c}_i &= \sum_{j=0}^i \alpha_j \binom{4-j}{4-i} \left(-\frac{\beta_1}{6\beta_0}\right)^{i-j}, & \hat{d}_i &= \sum_{j=0}^i \beta_j \binom{6-j}{6-i} \left(-\frac{\beta_1}{6\beta_0}\right)^{i-j}. \end{aligned}$$

代入 $a_i = \hat{a}_i, b_i = \hat{b}_i, c_i = \hat{c}_i, d_i = \hat{d}_i$ により定義される2つの写像

$$\begin{aligned} \psi : R = \mathbb{C}[a_0, a_2, a_3, a_4, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6] &\rightarrow \mathbb{C}[\alpha_0, \dots, \alpha_4, \beta_0, \dots, \beta_6, \alpha_0^{-1}], \\ \tilde{\psi} : \tilde{R} = \mathbb{C}[c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, d_0, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6] &\rightarrow \mathbb{C}[\alpha_0, \dots, \alpha_4, \beta_0, \dots, \beta_6, \beta_0^{-1}] \end{aligned}$$

は単射で、定義域を $J_{*,*}^{E_8} = R \cap \tilde{R}$ に制限すると同一。その制限写像

$$\left(\psi|_{J_{*,*}^{E_8}} = \tilde{\psi}|_{J_{*,*}^{E_8}} \right) : J_{*,*}^{E_8} \rightarrow \mathbb{C}[\alpha_0, \dots, \alpha_4, \beta_0, \dots, \beta_6]$$

は $J_{*,*}^{E_8}$ から4次形式と6次形式の半不変式の環への同型写像を与える。

結論

- Wirthmüllerの定理(1992)以来、30年近く未解決であった $W(E_8)$ 不変弱Jacobi形式の全貌が明らかになった。 ($R=E_8$ の場合のみ特別)

定理 (KS 2024)

$W(E_8)$ 不変弱Jacobi形式のなす環は、2変数6次形式と4次形式の連立共変式のなす環に同型である。

- 2変数 n 次形式 (n 次同次多項式)の不変式・共変式の環は、19世紀以来よく研究されており、その構造はよく分かっている (不変式論)

不変式論研究の結果(Olive 2014)を利用

⇒ $W(E_8)$ 不変弱Jacobi形式の環は194個の生成元から生成される

- 194個の生成元についても a_i, b_j を用いて全て具体的に構成した。

⇒ 生成元が分かると分配関数の仮説を組むのが容易になる

展望

- 類似の定理が見つかったている：

定理 (Nagano-Ueda 2021)

符号(2,18)のeven unimodular latticeのモジュラー形式の環は、2変数12次形式と8次形式の連立不変式のなす環に同型である。

(K3曲面と関連)

定理 (KS 2025)

D_4 triality invariantsの環は、2変数3次形式と2次形式の連立共変式のなす環に同型である。

(4d $\mathcal{N}=2$ SU(2) $N_f=4$ ゲージ理論と関連)

- 不変式論は19世紀に発展した「古典」の数学であるが、まだまだ物理への活用の余地がありそうである。