

レフシェッツ・シンブル法で切り拓く 量子論的時間発展のフロンティア

離散的手法による場と時空のダイナミクス2025
2025年9月10日(水)、明治学院大学(白金キャンパス)

西村 淳 (KEK、総研大)

0. はじめに

量子時間発展を記述する 2つの言葉

1) シュレディンガー方程式



等価

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi$$

ハミルトニアン



2) ファインマン経路積分

$$\psi(x_f, t_f) = \int \mathcal{D}x(t) \psi(x(t_i), t_i) e^{iS[x(t)]}$$
$$S = \int L dt$$

作用

ラグランジアン



優れている点：

- 自由度の大きな系 (場の理論を含む) への適用が可能
- 量子重力 (一般座標不変性) や行列模型 (非摂動的弦理論) への拡張が可能
- 数値シミュレーション という強力な手法が適用できる可能性あり

実時間経路積分に関する最近の発展

➤ 量子力学：

$$\Psi(x_f, t_f) = \int_{x(t_i)=x_i} \mathcal{D}x(t) \Psi(x(t_i), t_i) e^{iS[x(t)]/\hbar}$$

➤ 量子重力 (“時間” が力学的自由度の一部)

$$\Psi[h] = \int \mathcal{D}g_{\mu\nu} e^{iS[g]/\hbar}$$

➤ IKKT 行列模型 超弦理論の非摂動的定式化
 (“時間” という概念の創発)

$$Z = \int dA_\mu e^{iS[A]}$$

位相が回る (振動積分)

概念的な問題: このような振動積分をどのように定義したらいいのか？

➡ ピカルル・レフシェッツ理論

技術的な問題: シミュレーションにおける符号問題をどう解決するか？

➡ レフシェッツ・シンブル法

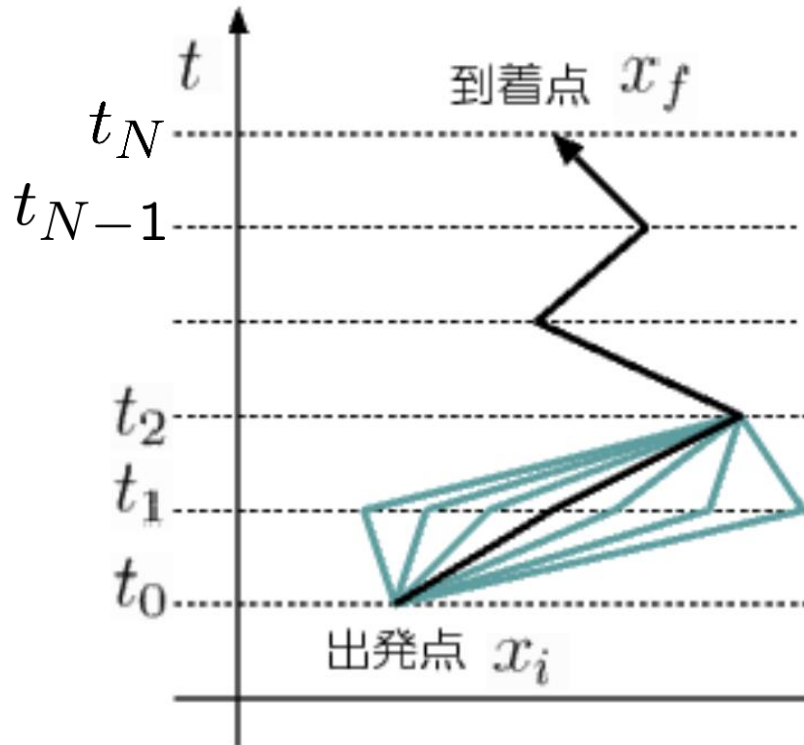
目次

- 0. はじめに
- 1. 実時間経路積分の数値シミュレーション
- 2. 量子トンネル効果
- 3. 量子デコヒーレンス効果
- 4. 宇宙の始まりにおける量子トンネル効果
- 5. まとめと展望

1. 実時間経路積分の数値シミュレーション

実時間経路積分

$$\Psi(x_f, t_f) = \int \mathcal{D}x(t) \Psi(x(t_i), t_i) e^{iS[x(t)]/\hbar}$$



時間を離散化する

$$t = t_0, t_1, \dots, t_N$$

各時刻での座標 $x_n = x(t_n)$
に関して、積分を実行する。

但し $x_N = x_f$ (固定)

$$\Psi(x_N, t_N) = \int dx_0 dx_1 \cdots dx_{N-1} \Psi(x_0, t_0) e^{iS[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]/\hbar}$$

このような多重積分をどう定義し、数值的に計算するか？

符号問題

波動関数の実時間発展：

$$\Psi(x_f, t_f) = \int \mathcal{D}x(t) \Psi(x(t_i), t_i) e^{iS[x(t)]}$$

正定値でないので、確率分布と見なすことができない

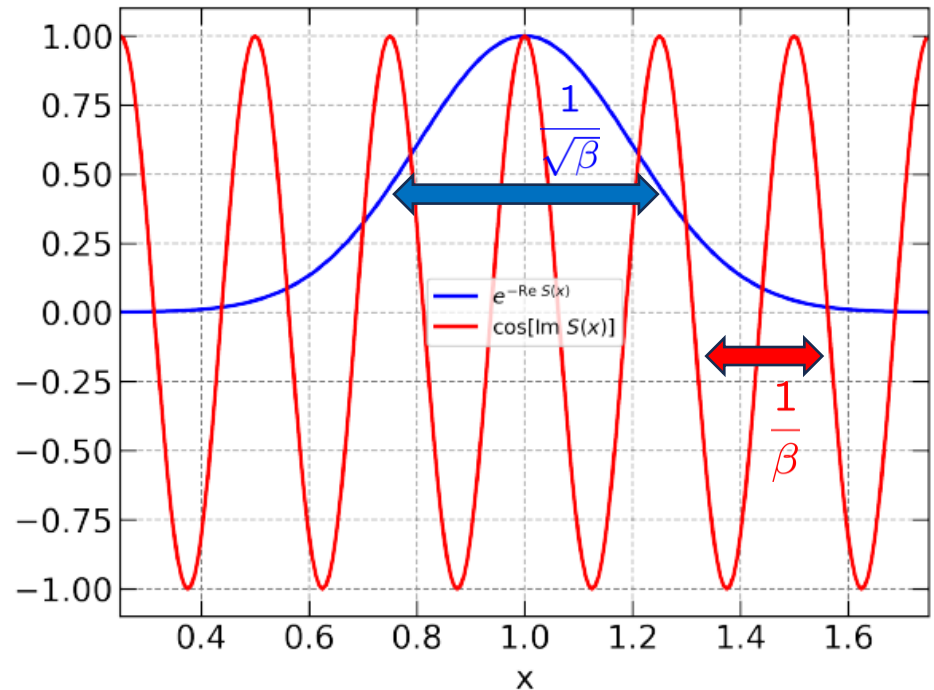
(簡単な例)

$$\begin{aligned} Z &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}\beta(x-i)^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \cos(\beta x) e^{-\frac{1}{2}\beta(x^2-1)} \end{aligned}$$

確率分布と見て
 x を生成

正負の値をとる。 β が大きいと、
激しい相殺を引き起こす

符号問題

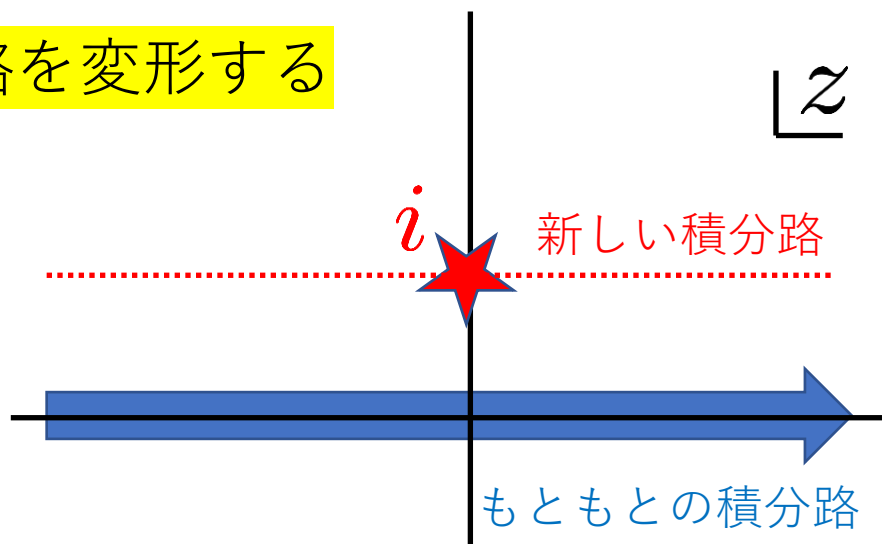


そうだ！ コーシーの定理を使おう！

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}\beta(x-i)^2}$$

複素積分 $Z = \int dz e^{-\frac{1}{2}\beta(z-i)^2}$ を実軸に沿って行うことに相当。

積分路を変形する



$$z = i + \xi \quad \xi \in \mathbb{R}$$

積分の両端を変形する寄与は、無限遠で無視できる。

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\frac{1}{2}\beta\xi^2}$$

正定値！



符号問題は解決！

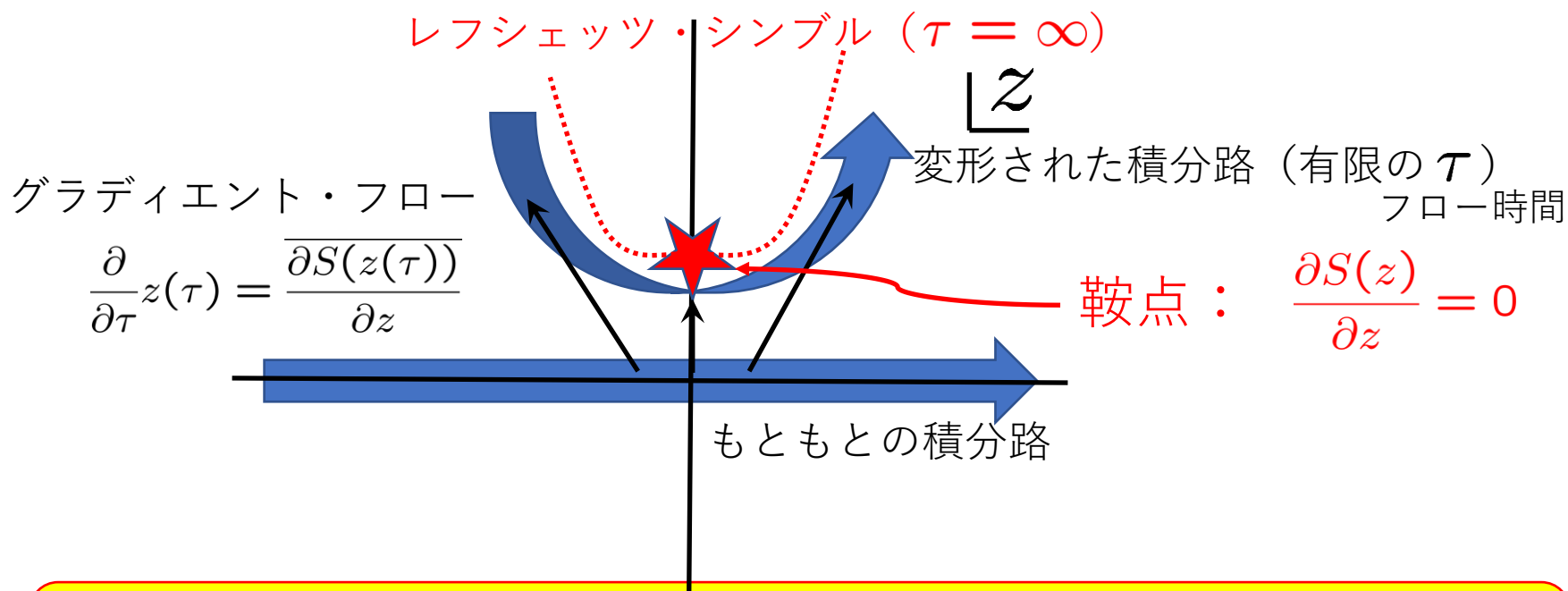
でも、複雑な多重積分になったら、こんなことできるの？



レフシェッツ・シンブル法

A.Alexandru, G.Basar, P.F.Bedaque, G.W.Ridgway
and N.C.Warrington, JHEP 1605 (2016) 053

$$Z = \int dz e^{-S(z)}$$



x から $z(x; \tau)$ への 1 対 1 の写像が得られる。→ 積分路の変形を定義
(コーシーの定理)

グラディエント・フローのもつ重要な性質

$S(x)$ は複素数に値をもつことに注意！

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} S(z(x; \tau)) &= \frac{\partial S(z(x; \tau))}{\partial z_k} \frac{\partial z_k(x; \tau)}{\partial \tau} \\ &= \frac{\partial S(z(x; \tau))}{\partial z_k} \overline{\frac{\partial S(z(x; \tau))}{\partial z_k}} \\ &= \sum_k \left| \frac{\partial S(z(x; \tau))}{\partial z_k} \right|^2 \geq 0\end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial \tau} z(\tau) = \frac{\partial S(z(\tau))}{\partial z}$

正定値！
(ゼロとなるのは鞍点のみ。)

グラディエント・フローに沿って、
作用の実部は単調増加、作用の虚部は一定。

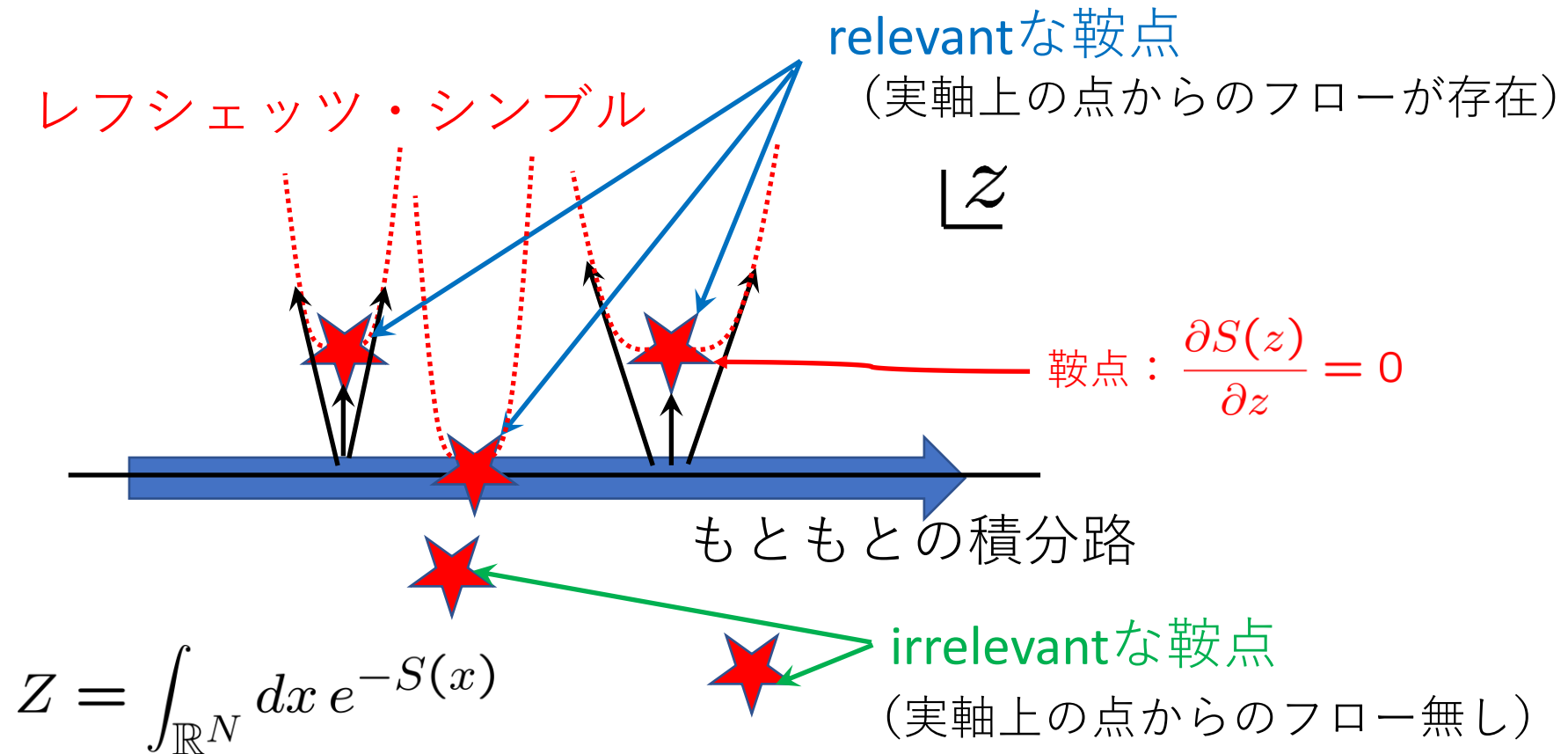


$\tau \rightarrow \infty$ で得られる積分路（レフシェッツ・シンブル）上では、
作用の虚部は一定。

符号問題は解決！

ピカルル・レフシェッツ理論

鞍点法の多重積分版



- relevantな鞍点 z^* からの寄与 $\sim e^{-S(z^*)}$
- もともとの積分路上の鞍点は必ずrelevant

このように、振動積分はwell definedにできる。
(積分路の不定性は無い)

3. 量子トンネル効果

量子トンネル効果

- 虚時間経路積分において **インスタントン** として現れる。

- 場の理論における false vacuum の崩壊率 Coleman ('77)
- 一次相転移における bubble 核形成

$$Z = \int \mathcal{D}x(t) e^{i \int dt L}$$

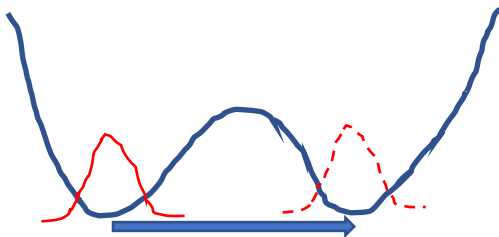
$$L = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - (x^2 - 1)^2$$

$$t = -i\tau$$

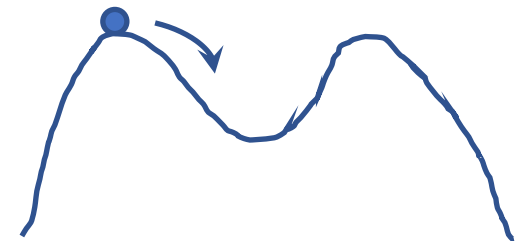
虚時間

$$Z = \int \mathcal{D}x(\tau) e^{- \int d\tau \tilde{L}}$$

$$\tilde{L} = \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + (x^2 - 1)^2$$



量子トンネル効果



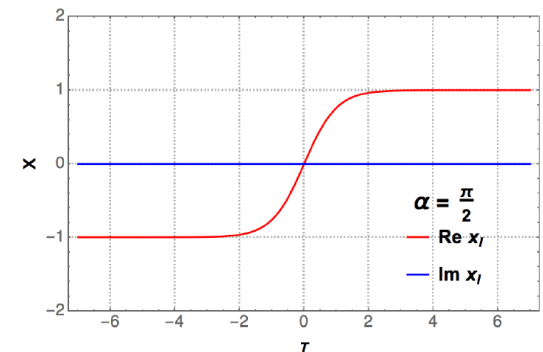
古典解

$$x(\tau) = \tanh \tau$$

インスタントン

トンネル振幅を半古典近似の範囲内で計算すると

$$\sim \exp(-S_0/\hbar) \quad \text{非摂動現象!}$$



実時間経路積分で量子トンネル効果を直接見たらどうなるか？

● 動機

- 実際の時間発展には、ポテンシャル障壁を超えるような古典的な運動も寄与（e.g., 電弱理論におけるスファーレロン）
- トンネル効果の過程で何が起きているのか、また、その後の波動関数の時間発展は？

- ところが、インスタントンを素朴に解析接続して実時間に引き戻すと **singular** な複素軌道になってしまう。

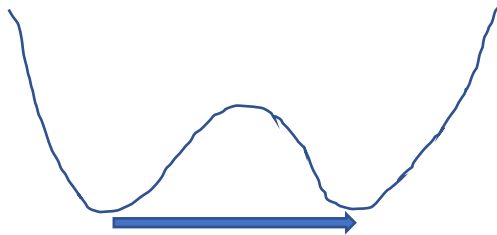
Cherman-Ünsal ('14)

こうした概念的な問題を、
具体的な実時間経路積分の数値計算で明らかにできる。

インスタントンを解析接続すると？

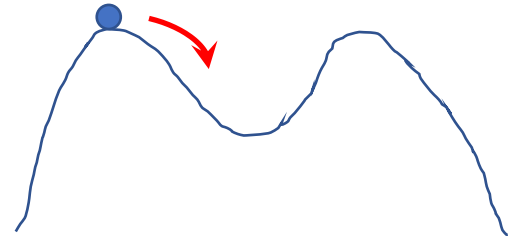
Cherman-Ünsal ('14)

$$L = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - (x^2 - 1)^2$$



量子トンネル効果

$$\tilde{L} = \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + (x^2 - 1)^2$$



ウィック回転: $t \mapsto \tau e^{-i\alpha}$

$$x(t) \mapsto x(\tau)$$

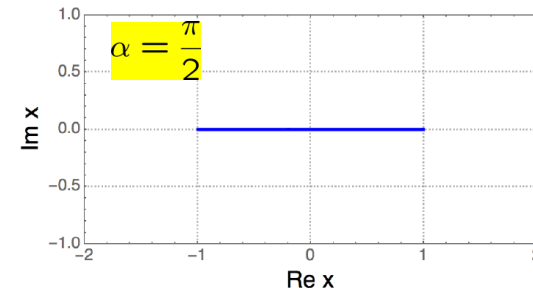
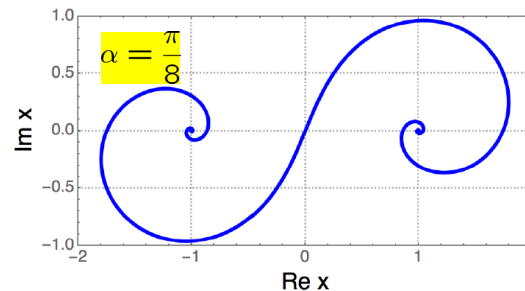
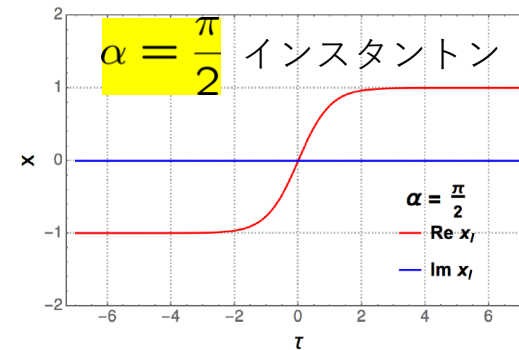
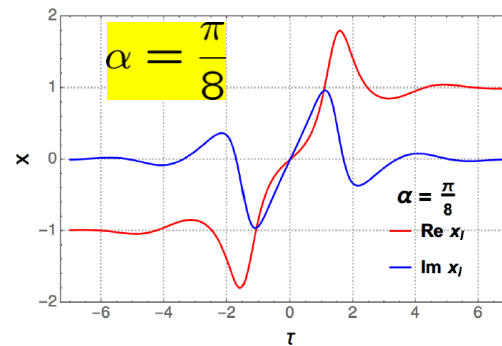
$$L = e^{2i\alpha} \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - (x^2 - 1)^2$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \text{imag. time}$$

$$x(\tau) = \tanh \tau$$

classical solution for general α

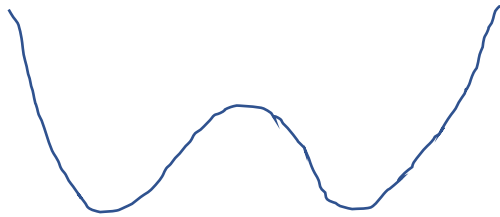
$$x(\tau) = \tanh \left(\tau e^{-i(\alpha - \frac{\pi}{2})} \right)$$



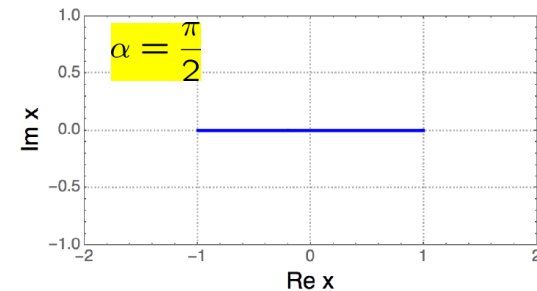
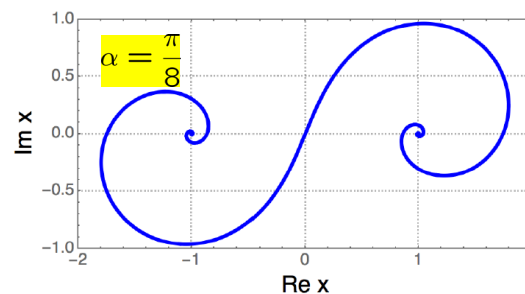
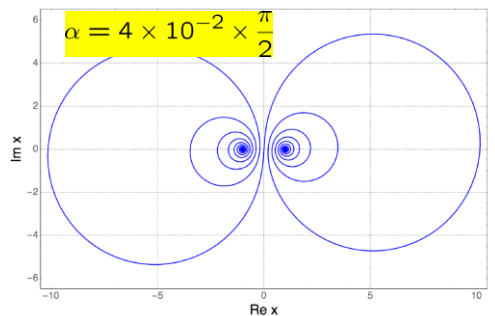
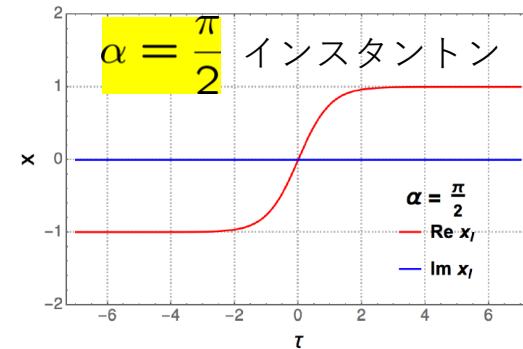
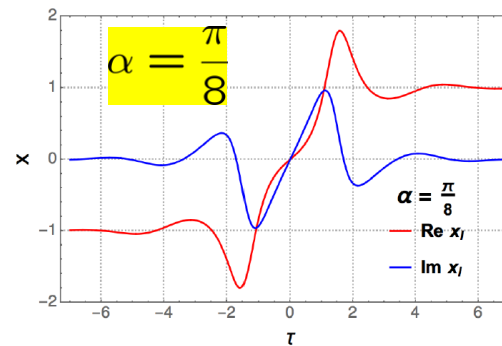
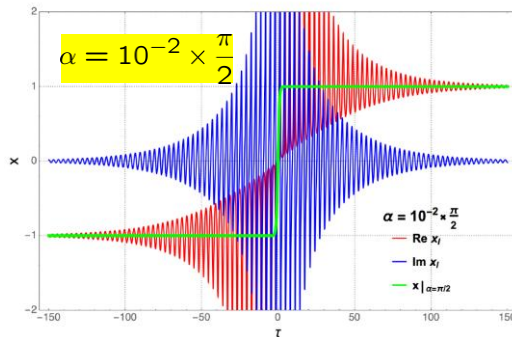
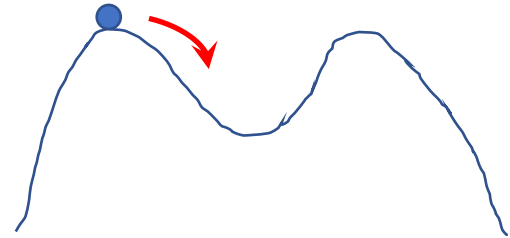
インスタントンを解析接続すると？

Cherman-Ünsal ('14)

$$L = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - (x^2 - 1)^2$$



$$L = \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + (x^2 - 1)^2$$



singular for $\alpha \rightarrow 0$

どのような複素軌道が量子トンネル効果を表すのか？

二重井戸型ポテンシャルにおける古典解

Koike-Tanizaki ('14)

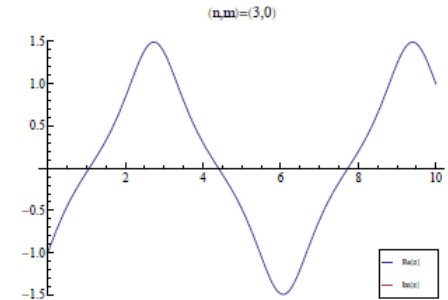
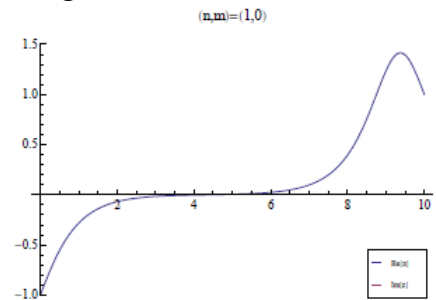
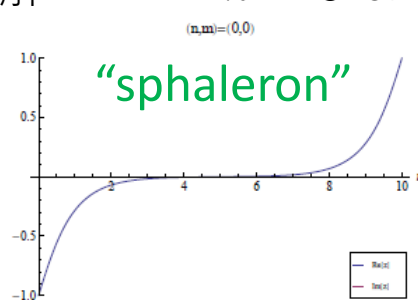
エネルギー保存則：
$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + (z^2 - 1)^2 = p^2$$

$$z(t) = \sqrt{\frac{p^2 - 1}{2p}} \operatorname{sd}\left(\sqrt{2p}t + c, \sqrt{\frac{1+p}{2p}}\right)$$
 ヤコビ楕円関数

積分定数： c, p ← 境界条件 $\begin{cases} z\left(-\frac{T}{2}\right) = -1 \\ z\left(\frac{T}{2}\right) = 1 \end{cases}$

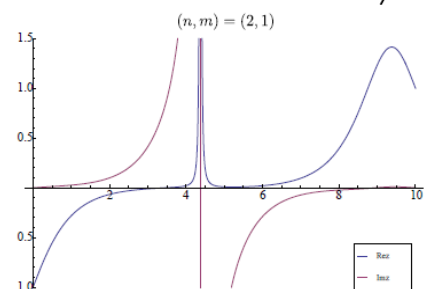
整数 (n, m) でラベルされる無限個の解が存在。

実の解： $n = 0$ or $m = 0$



$T = 10$

複素の解： $n \neq 0$ and $m \neq 0$



整数 n, m が大きくなるにつれて激しく振動

$\operatorname{Im}(S) = S_0$ for $T \rightarrow \infty$

$\Leftrightarrow \exp(-S_0/\hbar)$ suppression

量子トンネル効果
を表している？

実時間経路積分の数値シミュレーション

J.N., Katsuta Sakai, Atis Yosprakob,
JHEP 09 (2023) 110, 2307.11199 [hep-th]

$$\Psi(x_f, t_f) = \int_{x(t_f) = x_f} \mathcal{D}x(t) \Psi(x(t_i), t_i) e^{iS[x(t)]}$$

$$S[x(t)] = \int dt \left\{ \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right\}$$

$$V(x) = \alpha(x^2 - 1)^2 \quad \alpha = 2.5$$

$$\Psi(x, t_i) = \exp \left\{ -\frac{1}{4\sigma^2} (x - b)^2 \right\}$$

$\sigma = 0.3$, $b = -1$

$$x_f = 1$$

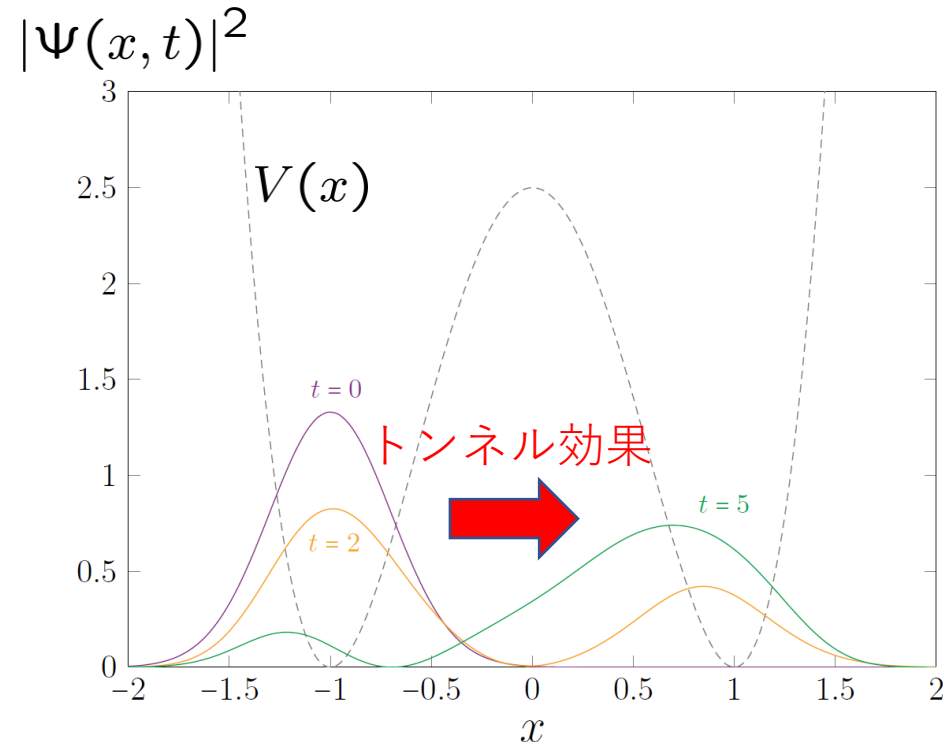
$$T \equiv t_f - t_i = 2$$

時間の離散化

$$N = 20$$

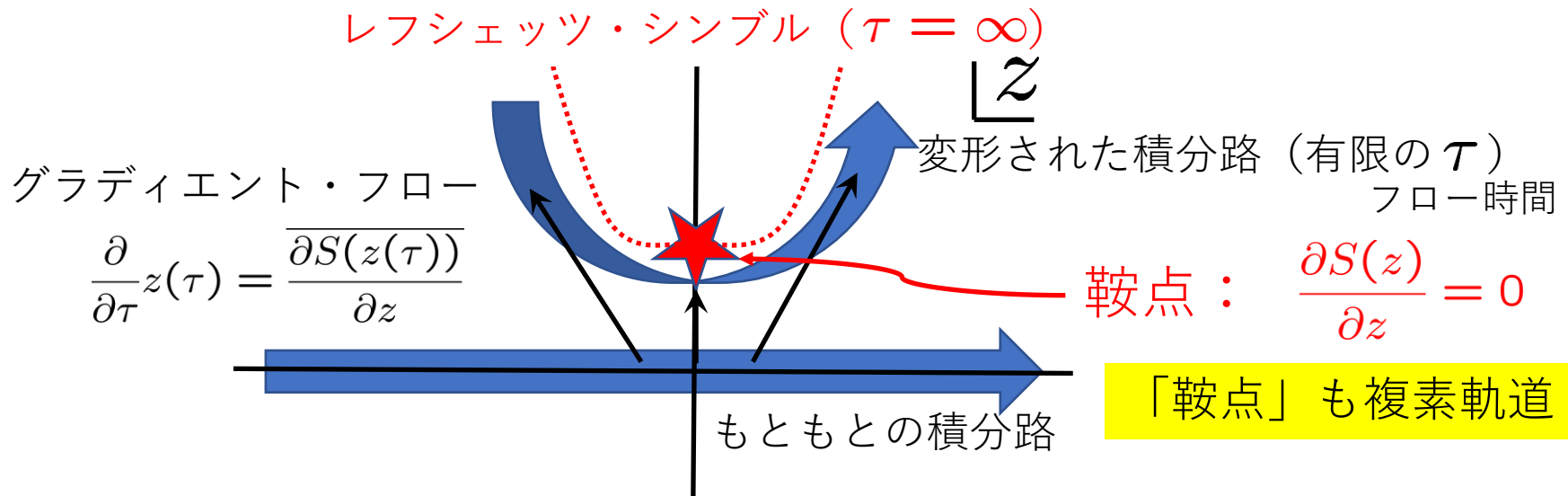
$$x_n = x(t_n)$$

$$t_n = \frac{n}{N} T \quad (n = 0, \dots, N)$$



レフシェッツ・シンブル法により 無数の複素軌道が生成される

$$\begin{aligned}\Psi(x_f, t_f) &= \int \mathcal{D}x(t) \Psi(x(t_i), t_i) e^{iS[x(t)]} \\ \Psi(x_N, t_N) &= \int dx_0 dx_1 \cdots dx_{N-1} \Psi(x_0, t_0) e^{iS[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]/\hbar} \\ &\Updownarrow \\ Z &= \int dz e^{-S(z)}\end{aligned}$$

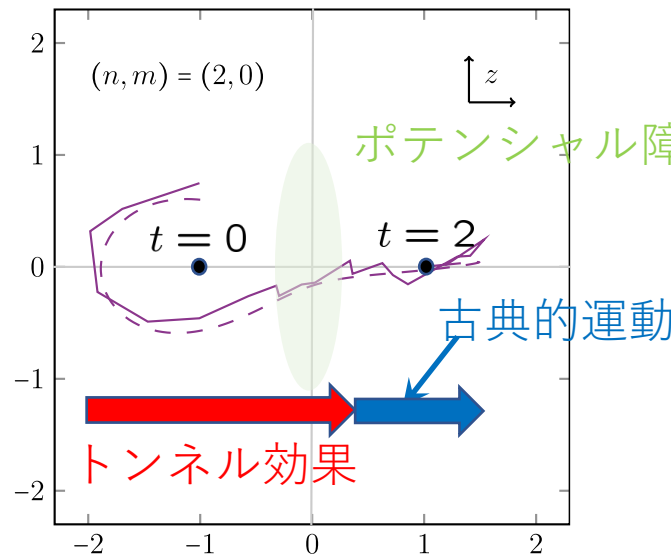
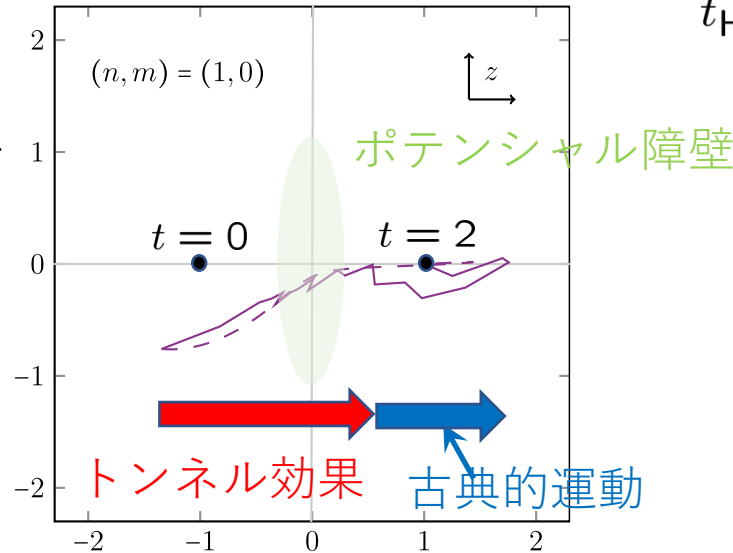
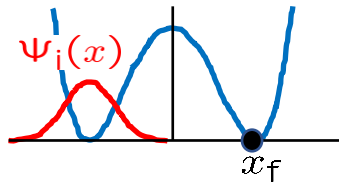


実際には、複数の鞍点まわりのシンブルの寄与を拾うため、
フロー時間 τ に関しても、一定の範囲で積分。

レフシェッツ・シンブル法の結果

typical config $z(t)$ at large τ

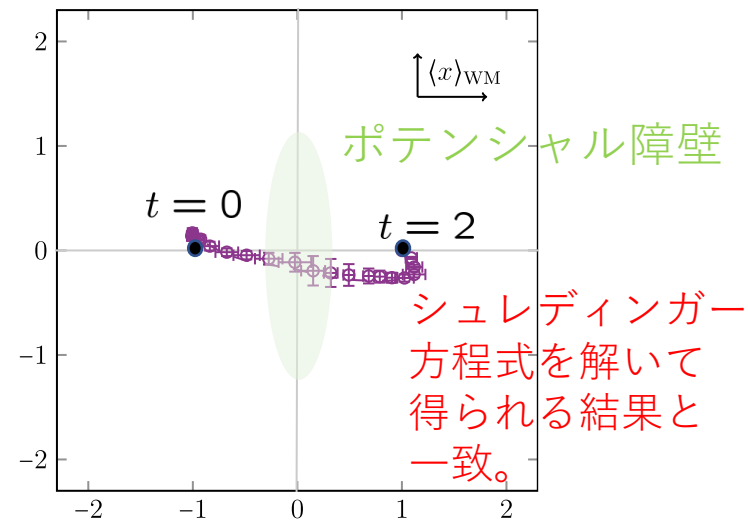
$N_\tau = 10$, $0.2 < \tau < 4$
 $t_{\text{HMC}} = 1.0$, $N_{\text{HMC}} = 10$



アンサンブル平均

$$\left(x(t) \text{ に対する弱値に対応} \right)$$

$$\frac{\langle x_f | e^{-i\hat{H}(T-t)} \hat{x} e^{-i\hat{H}t} | \Psi_i \rangle}{\langle x_f | e^{-i\hat{H}(T-t)} e^{-i\hat{H}t} | \Psi_i \rangle}$$



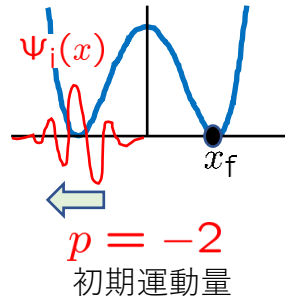
量子トンネル効果は、
複素軌道によって表される

(注) 点線は
運動方程式の
複素解 (鞍点)
のうち、近い
ものを表す

Koike-Tanizaki
(14)

但し、
 $x(0) \neq -1$
 $x(T) = 1$

初期状態に運動量を導入する

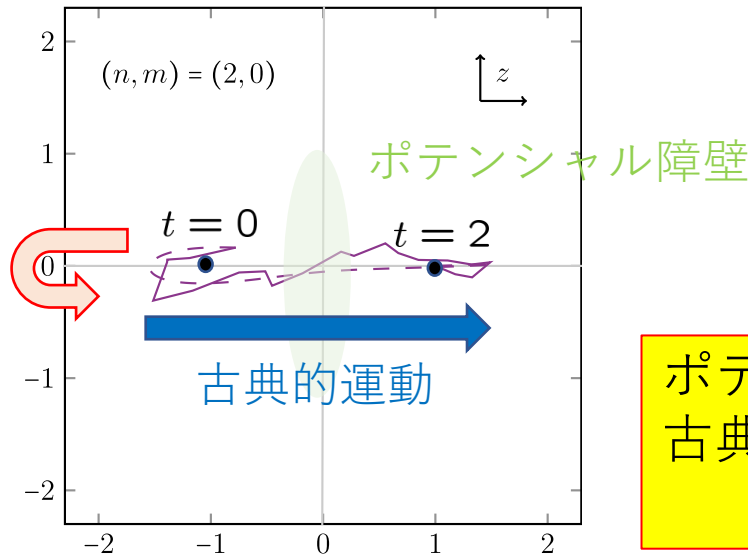
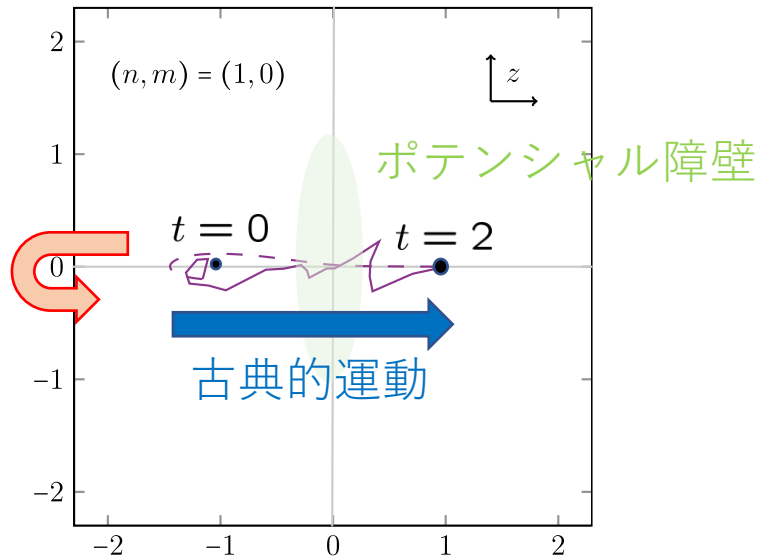


(注) 点線は
運動方程式の
複素解 (鞍点)
のうち、近い
ものを表す

Koike-Tanizaki
(’14)

但し、
 $x(0) \neq -1$
 $x(T) = 1$

typical config $z(t)$ at large τ



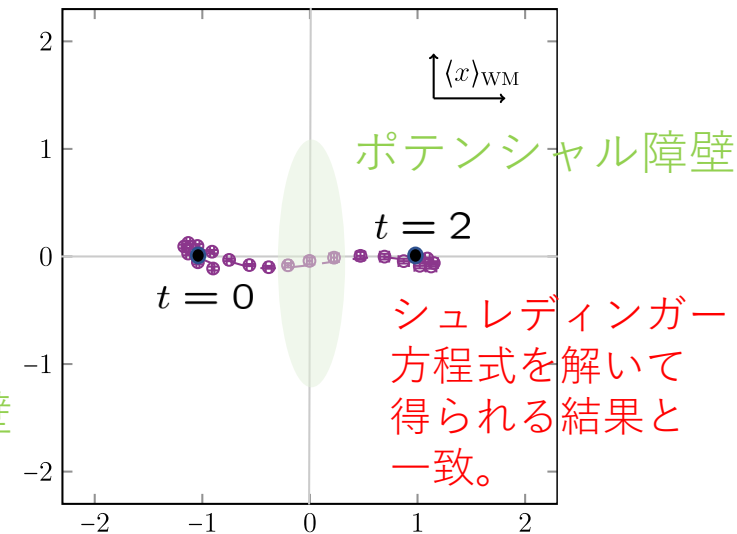
$$\Psi(x, t_i) = \exp \left\{ -\frac{1}{4\sigma^2} (x+1)^2 + i p x \right\}$$

$$p = -2$$

アンサンブル平均

$$\left(x(t) \text{ に対する弱値に対応} \right)$$

$$\frac{\langle x_f | e^{-i\hat{H}(T-t)} \hat{x} e^{-i\hat{H}t} | \Psi_i \rangle}{\langle x_f | e^{-i\hat{H}(T-t)} e^{-i\hat{H}t} | \Psi_i \rangle}$$



ポテンシャル障壁を越える
古典的運動が支配的になる
→ ほぼ実の軌道

量子トンネル効果に対する新しい理解

$$\Psi(x_f, t_f) = \int_{x(t_f) = x_f} \mathcal{D}x(t) \Psi(x(t_i), t_i) e^{iS[x(t)]/\hbar}$$

初期波動関数： $\Psi(x, t_i) = \varphi(x) e^{ipx/\hbar}$
 $\varphi(x)$ は有限のサポート $\Delta \equiv [x_{\min}, x_{\max}]$ をもつと仮定。

$\hbar \rightarrow 0$ の極限では、経路積分は以下の条件を満たす $x(t)$ が支配的になる

古典運動方程式

$$\frac{\delta S[x(t)]}{\delta x(t)} = 0$$

境界条件

$$\begin{aligned} x(t_i) &\in \Delta, & \dot{x}(t_i) &= \frac{p}{m} \\ x(t_f) &= x_f \end{aligned}$$

実の $x(t)$ が存在する場合、
必ず **relevant** な鞍点となり支配的に



実の軌道

古典的運動の出現

実の $x(t)$ が存在しない場合、
relevant な鞍点のうち、最小の $\text{Im}S(>0)$
をもつものが支配的に



複素軌道

量子トンネル効果の
“半古典的” 記述

$$| \text{確率振幅} | \sim e^{-\text{Im}S[x^*]/\hbar}$$

弱測定を用いることによって（原理的には）観測可能

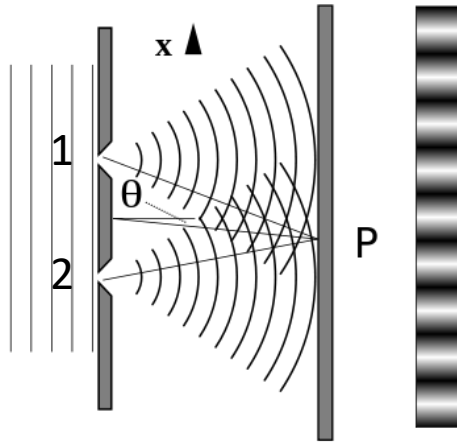
4. 量子デコヒーレンス効果

J.N., Hiromasa Watanabe,
“Quantum Decoherence from Complex Saddle Points”
Phys.Rev.Lett. 134 (2025) 21, 210401, e-Print: 2408.16627 [quant-ph]

J.N., Hiromasa Watanabe,
“Quantum decoherence in the Caldeira-Leggett model
by the real-time path integral on a computer”
e-Print: 2503.20699[hep-lat], to appear in JHEP

量子デコヒーレンスとは

二重スリット実験



$$|\psi_1(x) + \psi_2(x)|^2 \\ = |\psi_1(x)|^2 + |\psi_2(x)|^2 + 2 \operatorname{Re}(\psi_1^*(x)\psi_2(x))$$

干渉項

$$(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) |\mathcal{E}_0\rangle \rightarrow |\psi_1\rangle |\mathcal{E}_1\rangle + |\psi_2\rangle |\mathcal{E}_2\rangle$$

環境 量子もつれ状態

$$|\psi_1(x)|^2 \overset{=1}{\langle \mathcal{E}_1 | \mathcal{E}_1 \rangle} + |\psi_2(x)|^2 \overset{=1}{\langle \mathcal{E}_2 | \mathcal{E}_2 \rangle} + 2 \operatorname{Re}(\psi_1^*(x)\psi_2(x)) \overset{\approx 0}{\langle \mathcal{E}_1 | \mathcal{E}_2 \rangle} \\ \approx |\psi_1(x)|^2 + |\psi_2(x)|^2$$

干渉縞が消失 (デコヒーレンス)

スリット1を通った確率とスリット2を通った確率の和



「粒子がどちらのスリットを通ったか」という問い
が意味をなす (古典的な描像の出現)

対象系の縮約密度行列で見る 量子デコヒーレンス

x を通して環境 $\mathcal{E}$ と相互作用

“測定”

$$|\Psi\rangle = \int dx \psi(x) |x\rangle |\mathcal{E}_0\rangle \quad \Rightarrow \quad |\Psi\rangle = \int dx \psi(x) |x\rangle |\mathcal{E}(x)\rangle$$

“観測装置”

$$\langle \mathcal{E}(x) | \mathcal{E}(y) \rangle \approx 0 \quad \text{for } |x - y| \gg \delta$$

縮約密度行列 (reduced density matrix)

$$\hat{\rho}_S = \text{tr}_{\mathcal{E}} |\Psi\rangle \langle \Psi| = \int dx dy \rho_S(x, y) |x\rangle \langle y|$$

$$\rho_S(x, y) = \psi(x) \psi^*(y) \quad \Rightarrow \quad \rho_S(x, y) \approx |\psi(x)|^2 \delta(x - y)$$

pure state

mixed state

非対角成分の消失（減衰）

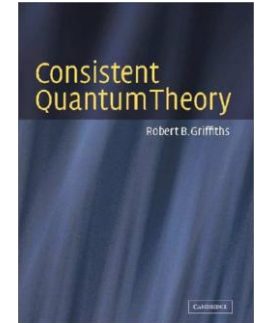
$|x\rangle$ という状態が $|\psi(x)|^2$ という確率
で現れると解釈できる。

量子デコヒーレンスの研究の重要性

- 量子論から古典論への転移

consistent history approach (GellMann-Hartle, Griffiths, ...)

量子系に対して“history”をconsistentに定義するには
「デコヒーレンス条件」が必要。



- 量子力学の観測問題を理解する上でも重要。

c.f.) Kenichi Konishi,

Int.J.Mod.Phys.A 37 (2022) 17, 2250113, arXiv: 2111.14723 [quant-ph]

“Quantum fluctuations, particles and entanglement:

A discussion towards the solution of the quantum measurement”

- 量子技術（量子測定、量子計算）において、
デコヒーレンスは誤差の原因の一つ

如何にコントロールするかが重要。

環境のモデルをどうとるか。

環境のパラメタに対する依存性。

Caldeira-Leggett模型

Caldeira-Leggett ('83)

$$L = L_S + L_E + L_{\text{int}}$$

$$L_S = \frac{1}{2} M \dot{x}(t)^2 - \frac{1}{2} M \omega_0^2 x(t)^2 ,$$

$$L_E = \sum_{k=1}^{N_E} \left\{ \frac{1}{2} m \dot{q}^k(t)^2 - \frac{1}{2} m \omega_k^2 q^k(t)^2 \right\} ,$$

$$L_{\text{int}} = c x(t) \sum_{k=1}^{N_E} q^k(t) ,$$

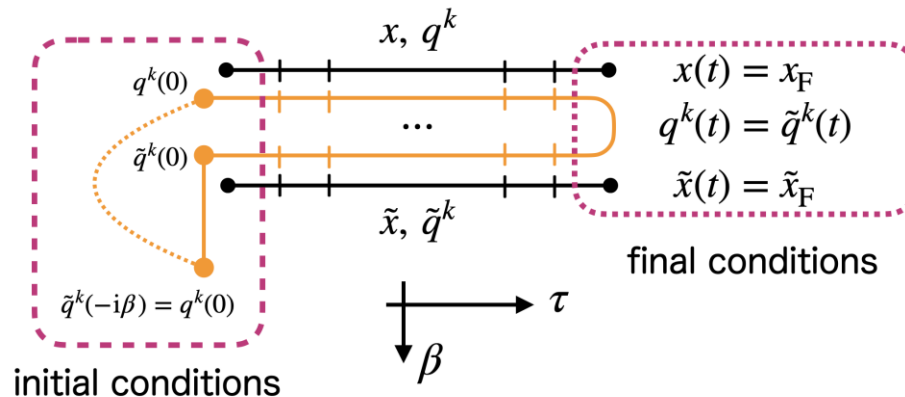
環境をtrace outして得られるreduced density matrix

$$\rho_S(x_F, \tilde{x}_F; t_F) = \int \mathcal{D}x \mathcal{D}\tilde{x} \prod_{k=1}^{N_E} \mathcal{D}q^k \mathcal{D}\tilde{q}^k \mathcal{D}\tilde{q}_0^k e^{-S_{\text{eff}}(x, \tilde{x}, q, \tilde{q}, \tilde{q}_0)} ,$$

$$S_{\text{eff}}(x, \tilde{x}, q, \tilde{q}, \tilde{q}_0) = -i \{ S(x, q) - S(\tilde{x}, \tilde{q}) \} + S_0(\tilde{q}_0) + \frac{1}{4\sigma^2} (x_0^2 + \tilde{x}_0^2)$$

Gaussian initial state assumed for the system

Environment initially in thermal equilibrium with temperature $1/\beta$



Tracing out environment $\mathcal{E}$

鞍点だけでデコヒーレンス効果が見える

JN, Hiromasa Watanabe, Phys.Rev.Lett. 134 (2025) 21,
210401, arXiv: 2408.16627 [quant-ph]

Introducing $X_\mu = \{x_i, \tilde{x}_i, q_i^k, \tilde{q}_i^k, (\tilde{q}_0^k)_j\}$

$$S_{\text{eff}}(x, \tilde{x}, q, \tilde{q}, \tilde{q}_0) = \frac{1}{2} X_\mu \mathcal{M}_{\mu\nu} X_\nu - C_\mu X_\mu + B$$

2次式

saddle point: $\bar{X}_\mu = (\mathcal{M}^{-1})_{\mu\nu} C_\nu$

$$X_\mu = \bar{X}_\mu + Y_\mu$$

relevantな複素鞍点は
uniqueに決まる。

$$\text{cost} = O(D^3)$$

$$D = 2N_t(1 + N_\mathcal{E}) + N_\beta N_\mathcal{E}$$

Integrating Y_μ ,

$$\rho_S(x_F, \tilde{x}_F; t_F) = \frac{1}{\sqrt{\det \mathcal{M}}} e^{-\mathcal{A}},$$
$$\mathcal{A} = B - \frac{1}{2} C_\mu (\mathcal{M}^{-1})_{\mu\nu} C_\nu$$

シンブルに沿った積分は
解析的に実行可能。
(normalizationを出すだけ)

$$|\rho_S(x, \tilde{x}; t)| \simeq \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Gamma_{\text{diag}}(t) \left(\frac{x + \tilde{x}}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \Gamma_{\text{off-diag}}(t) \left(\frac{x - \tilde{x}}{2} \right)^2 \right\}$$

デコヒーレンス効果

密度行列の非対角成分の減衰

$$|\rho_S(x, y; t)|$$

初期状態

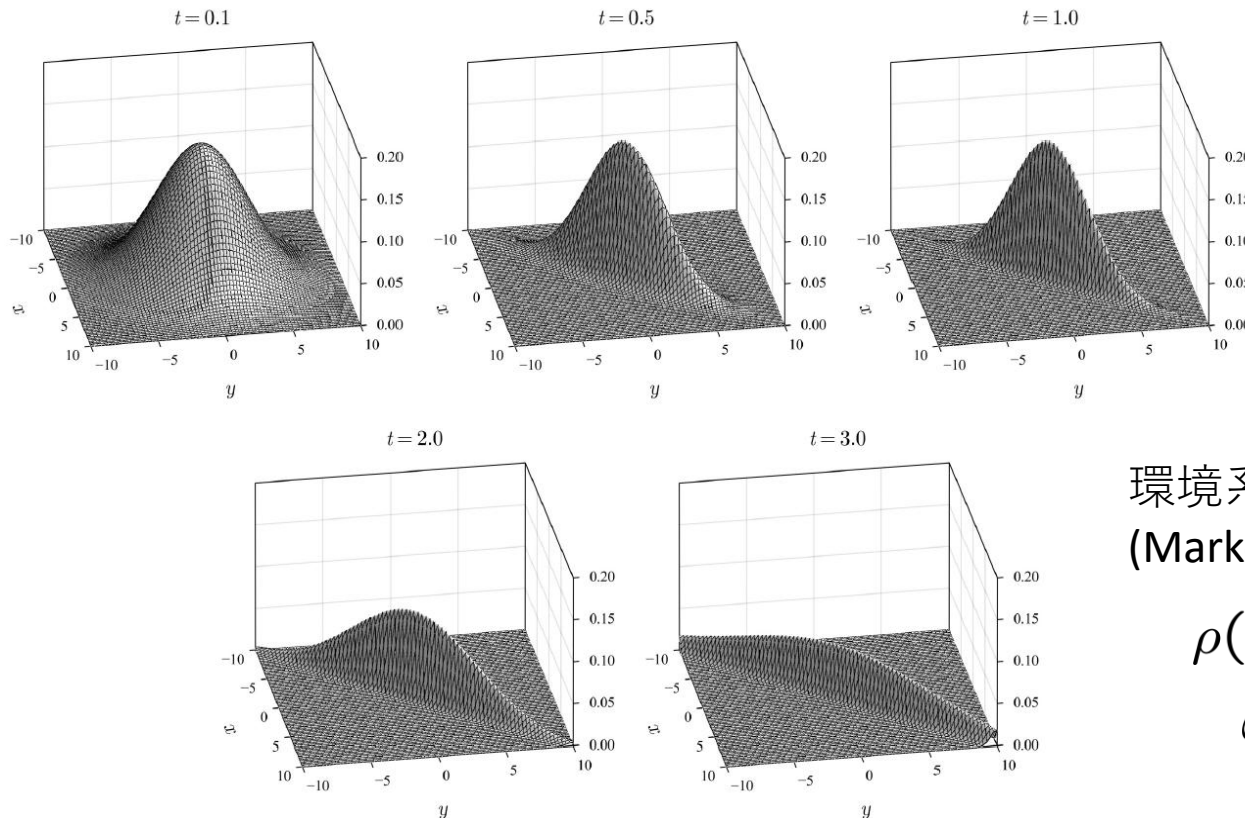
対象系：基底状態

$$\omega_r = 0.08$$

環境：温度 $1/\beta$ のカノニカル分布

$$N_{\mathcal{E}} = 64, \beta = 0.05$$

$$\omega_{\text{cut}} = 2$$



環境系の振動数分布：
(Markov近似を正当化するため)

$$\rho(\omega) \propto \omega^2 \quad (\text{Ohmic})$$

$$\omega \leq \omega_{\text{cut}} \quad (\text{cutoff})$$

t=0.1~1の間に、非対角成分が急速に減衰

マスター方程式からの予言

Caldeira-Leggett, Physica A 121 (1983) 587

マスター方程式 (Born近似、Markov近似を用いて導出)

$$\frac{d}{dt}\rho_S(x, \tilde{x}; t) = K(x, \tilde{x})\rho_S(x, \tilde{x}, t) , \quad (\omega_r \ll \omega_{\text{cut}} \ll T = \beta^{-1})$$
$$K(x, \tilde{x}) = \frac{i}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \right) - \frac{i}{2} M \omega_r^2 (x^2 - \tilde{x}^2) - \gamma(x - \tilde{x}) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right) - \frac{2M\gamma}{\beta} (x - \tilde{x})^2$$

The effect of decoherence is $\propto \frac{\gamma}{\beta}$

環境との相互作用: $c^2 \sim \frac{4\omega_{\text{cut}}^3}{3\pi N_{\mathcal{E}}} \gamma$

$$L_{\text{int}} = c \, x(t) \sum_{k=1}^{N_{\mathcal{E}}} q^k(t)$$

$$\rho_S(x, \tilde{x}; t) = \rho_S(x, \tilde{x}; 0) e^{-\frac{2M\gamma}{\beta} (x - \tilde{x})^2 t}$$

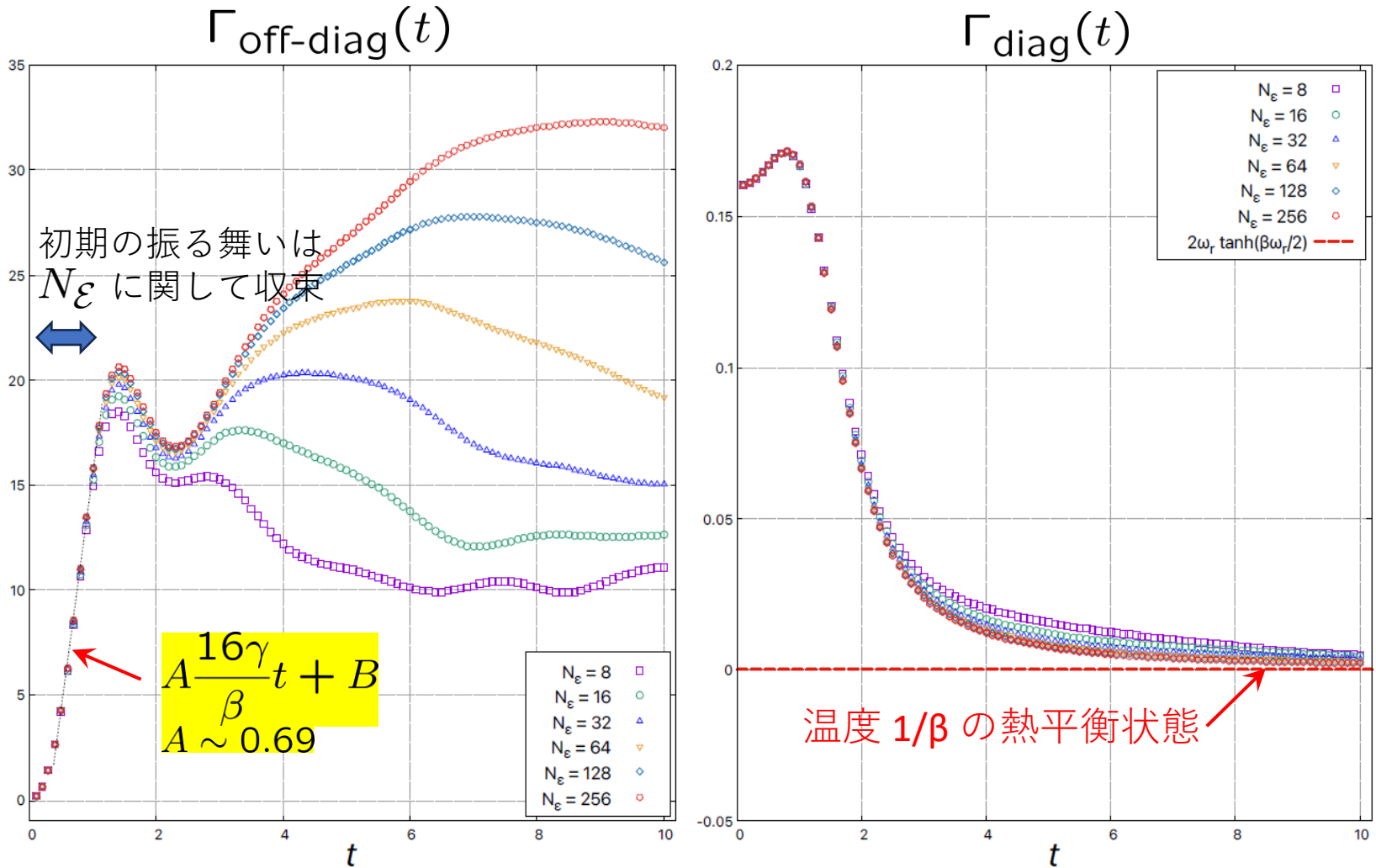
$$|\rho_S(x, \tilde{x}; t)| \simeq \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Gamma_{\text{diag}}(t) \left(\frac{x + \tilde{x}}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \Gamma_{\text{off-diag}}(t) \left(\frac{x - \tilde{x}}{2} \right)^2 \right\}$$

マスター方程式からの予言: $\Gamma_{\text{off-diag}}(t) \sim \frac{16M\gamma}{\beta} t$

以下、一般性を失うことなく $M=m=1$ とする。

$N_{\mathcal{E}} \rightarrow \infty$ に対する収束性

$$\beta = 0.05, \gamma = 0.1, \omega_{\text{cut}} = 2$$

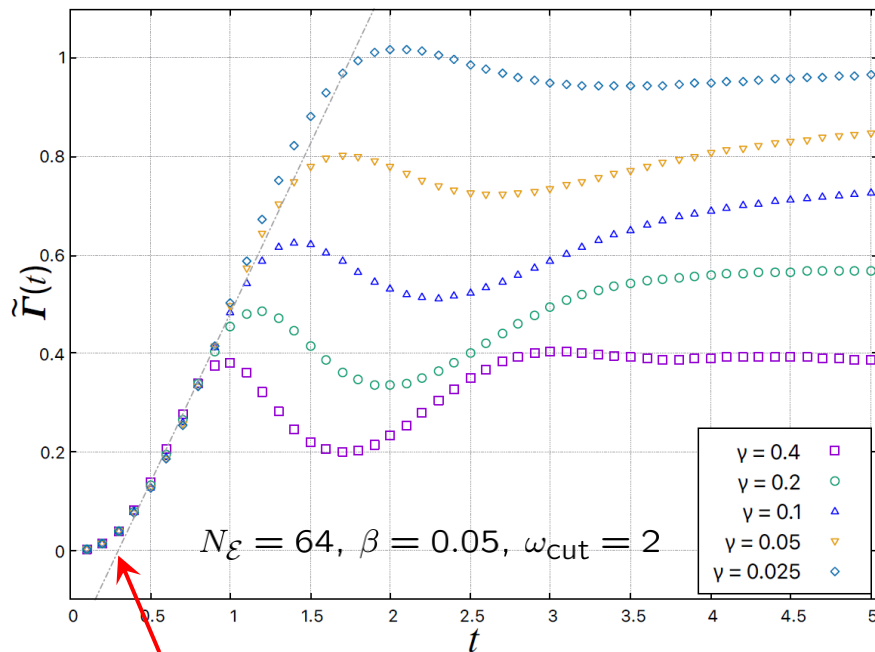


マスター方程式の予言には、 $\omega_r \ll \omega_{\text{cut}} \ll T = \beta^{-1}$ が必要。

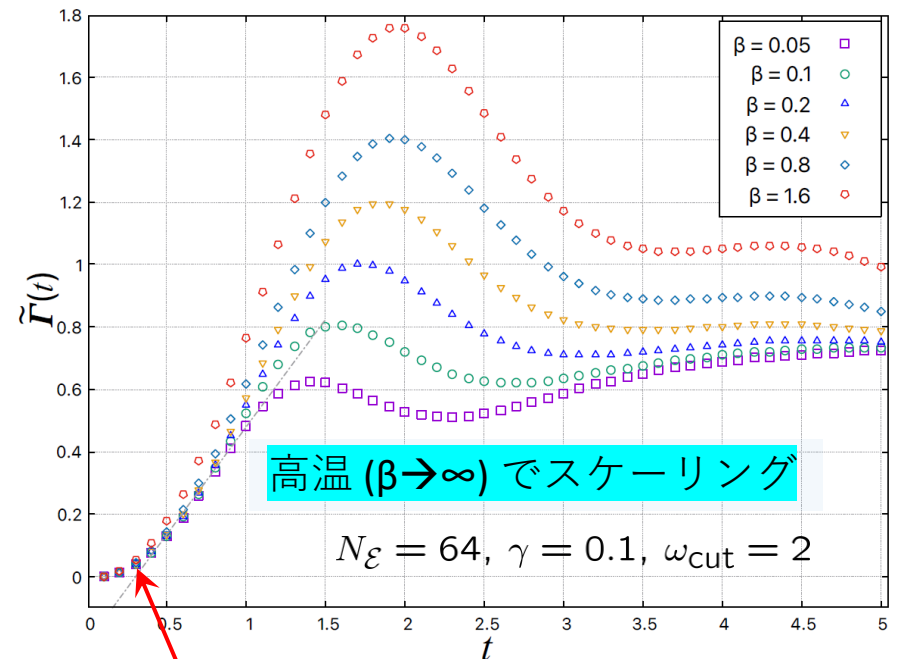
$$\text{c.f.) } \omega_r = 0.08 \quad \omega_{\text{cut}} = 2 \quad T = 20$$

β, γ に関するスケーリング

$$\tilde{\Gamma}(t) = \frac{\beta}{16\gamma} \{ \Gamma_{\text{off-diag}}(t) - \Gamma_{\text{off-diag}}(0) \}$$



$At + B$
 $A \sim 0.69$



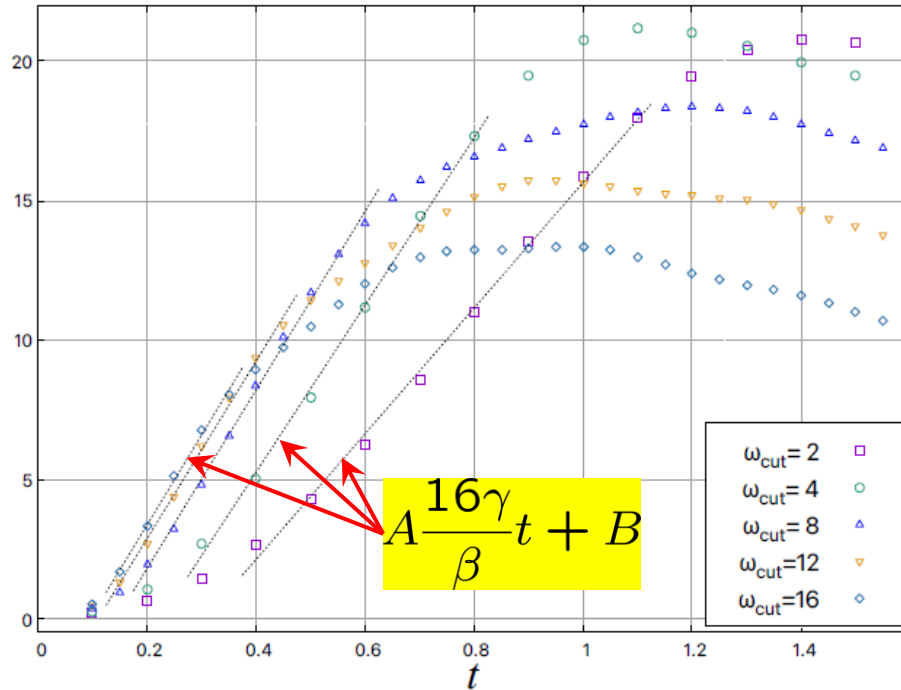
$At + B$
 $A \sim 0.69$

傾きが γ/β に比例するという、マスター方程式の予言を定性的に再現。(但し、数係数は30%ほど小さい。)

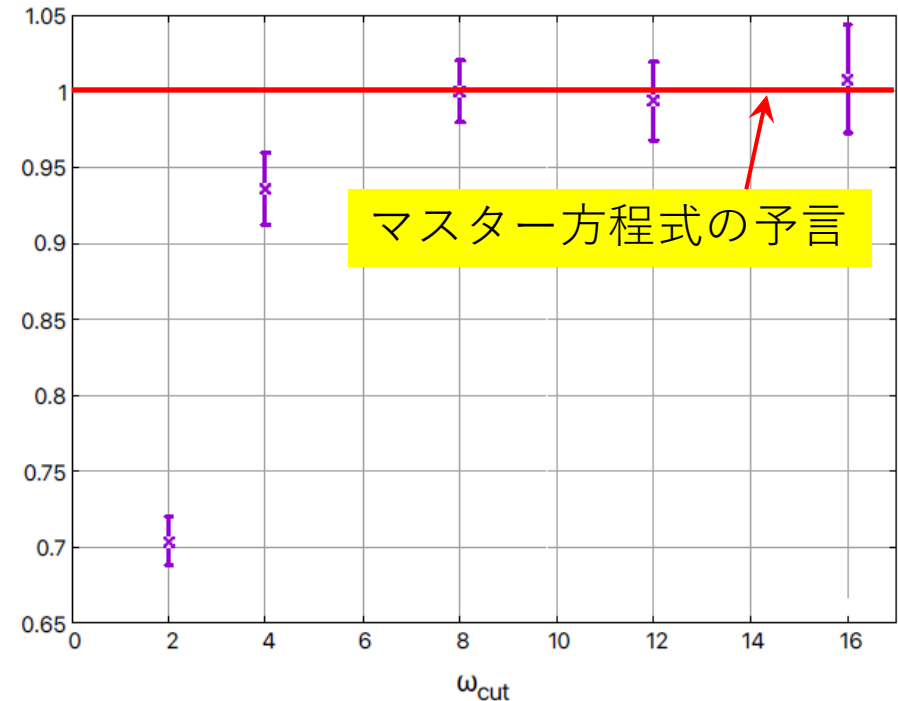
マスター方程式の予言との定量的な一致

J.N., Hiromasa Watanabe,
arXiv: 2503.20699[hep-lat], to appear in JHEP

$N_{\mathcal{E}} = 512, \beta = 0.05, \gamma = 0.1$



fitした数係数Aの値



ω_{cut} を大きくしていくことで、数係数も予言と一致。

マスター方程式の予言には、 $\omega_r \ll \omega_{\text{cut}} \ll T = \beta^{-1}$ が必要。

$\omega_r = 0.08$

$T = 20$

Markov近似を正当化するのに必要

「二重スリット実験」における干渉縞の消失

対象系の初期波動関数

J.N., Hiromasa Watanabe,
arXiv: 2503.20699[hep-lat], to appear in JHEP

$$\psi_I(x) = \psi_0(x) + \psi_1(x)$$

$$\psi_0(x) = \exp\left(-\frac{1}{4\sigma^2}(x - \xi)^2 - ipx\right)$$

$$\sigma = 0.1, \xi = 1, p = 1$$

$$\psi_1(x) = \exp\left(-\frac{1}{4\sigma^2}(x + \xi)^2 + ipx\right)$$

$$(N_{\mathcal{E}} = 64, \omega_{\text{cut}} = 2, \omega_r = 0)$$

γ : coupling with environment

β : inverse temperature

$$\rho_S(x, x; t)$$

$t = 0$

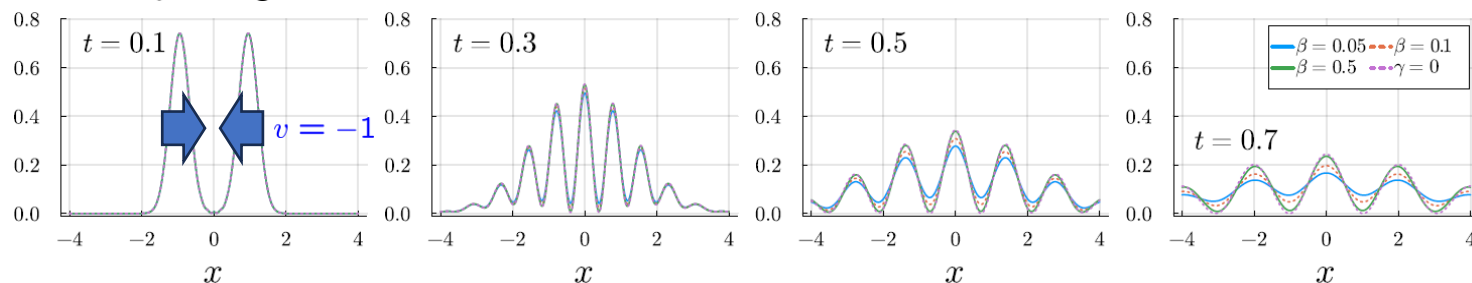
$t = 0.3$

$t = 0.5$

$t = 0.7$

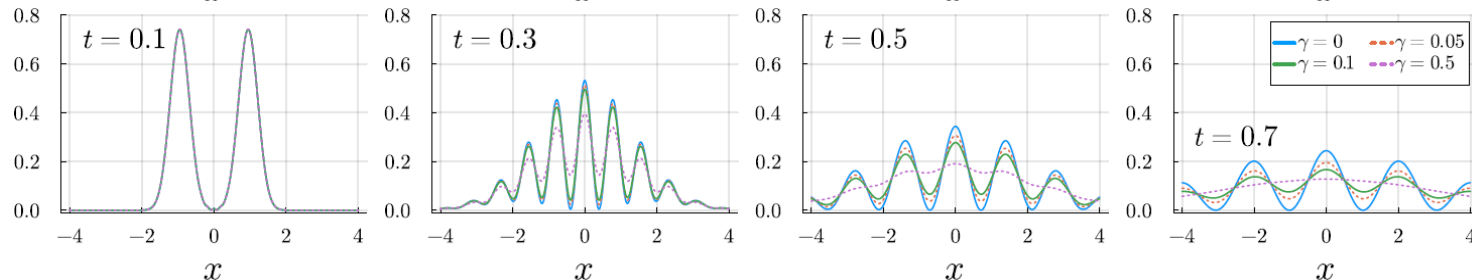
$$\beta = 0.5, 0.1, 0.05$$

$$(\gamma = 0.1)$$



$$\gamma = 0.05, 0.1, 0.5$$

$$(\beta = 0.05)$$



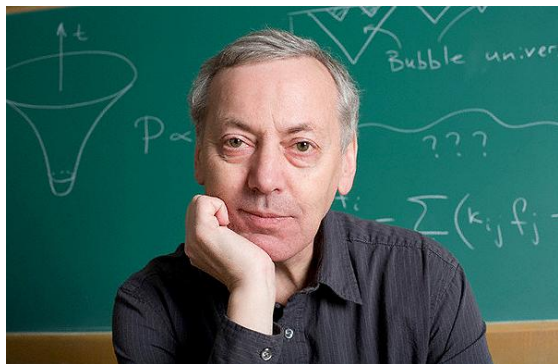
量子デコヒーレンスは、実時間経路積分においては複素鞍点で捉えられる。

4. 宇宙の始まりにおける量子トンネル効果

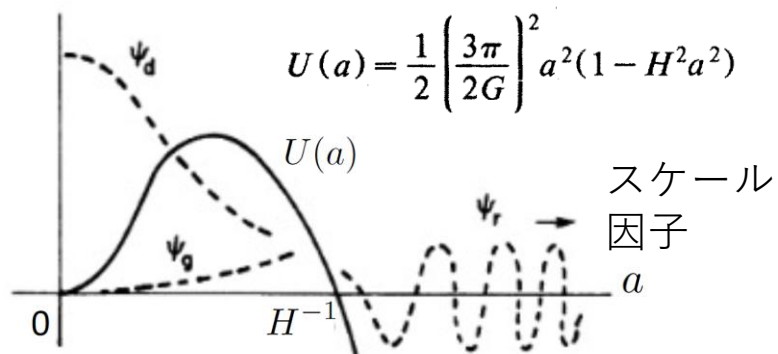
Chien-Yu Chou and JN,

JHEP 05 (2025) 142, arXiv:2407.17724 [gr-qc]

宇宙はどうやって始まったのか？



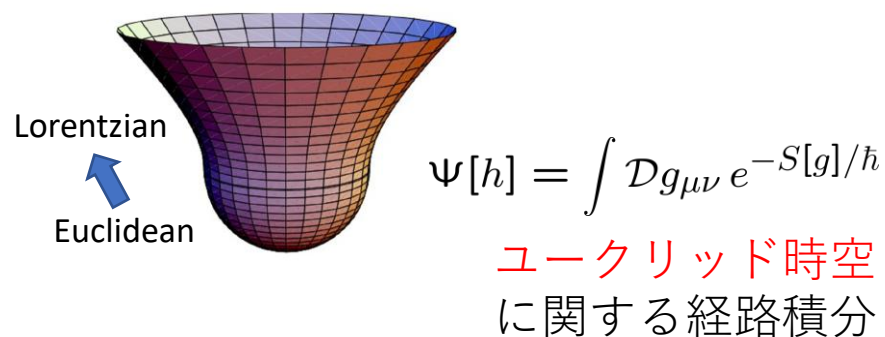
A. Vilenkin
“Creation of Universes from Nothing”
Phys.Lett.B 117 (1982) 25



「無」からのトンネル効果



J. B. Hartle and S. W. Hawking
“Wave function of the Universe”
Phys. Rev. D 28,(1983) 2960



「無境界」波動関数

量子宇宙論 (Quantum Cosmology)

量子重力理論

$$Z = \int \mathcal{D}g_{\mu\nu} e^{iS_{\text{EH}}[g]/\hbar} \quad \text{計量テンソルに関する経路積分}$$

$$S_{\text{EH}} = \int d^4x \sqrt{-\det g} \left(\frac{1}{G_{\text{N}}} \textcircled{R} - \Lambda \right) \quad \begin{array}{l} \text{アインシュタイン・} \\ \text{ヒルベルト作用} \end{array}$$

↑
スカラー曲率

G_{N} : ニュートンの重力定数 (重力の強さ)

Λ : 宇宙定数 (単位体積当たりのエネルギー)

古典極限

$$\frac{\delta S_{\text{EH}}[g(x)]}{\delta g_{\mu\nu}(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

(真空中の) アインシュタイン方程式

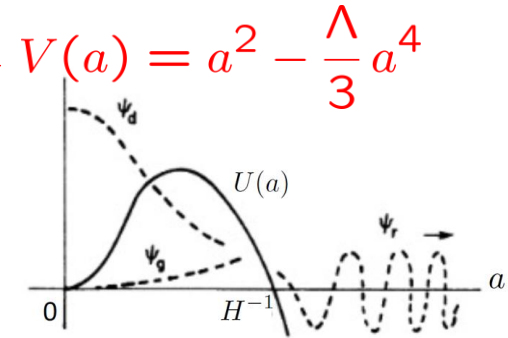
一様等方な時空に制限した模型

Halliwell-Louko, Phys.Rev.D 39 (1989) 2206

$$ds^2 = \underbrace{a^2(\eta)}_{\text{スケール因子}} \left(- \underbrace{N^2}_{\text{ラプス関数 (時間の刻み幅)}} d\underbrace{\eta}_{\text{時間変数 (共形時間)}}^2 + \underbrace{d\Omega_3^2}_{\text{3次元単位球面上の計量}} \right)$$

(cf) 2次元単位球面だったら $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$

$$S_{\text{EH}}[a, N] = -6\pi^2 \int d\eta \left\{ \frac{1}{N} \left(\frac{da}{d\eta} \right)^2 - N \underbrace{V(a)}_{\text{ポテンシャル}} \right\}$$



変数変換:

$$q = a^2$$

$$d\eta = a^{-2}(t) dt$$

$$ds^2 = -\frac{N^2}{q(t)} dt^2 + q(t) d\Omega_3^2$$

$$S_{\text{EH}}[q, N] = -6\pi^2 \int_0^1 dt \left\{ \frac{1}{4N} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 - N \left(1 - \frac{\Lambda}{3} q \right) \right\}$$

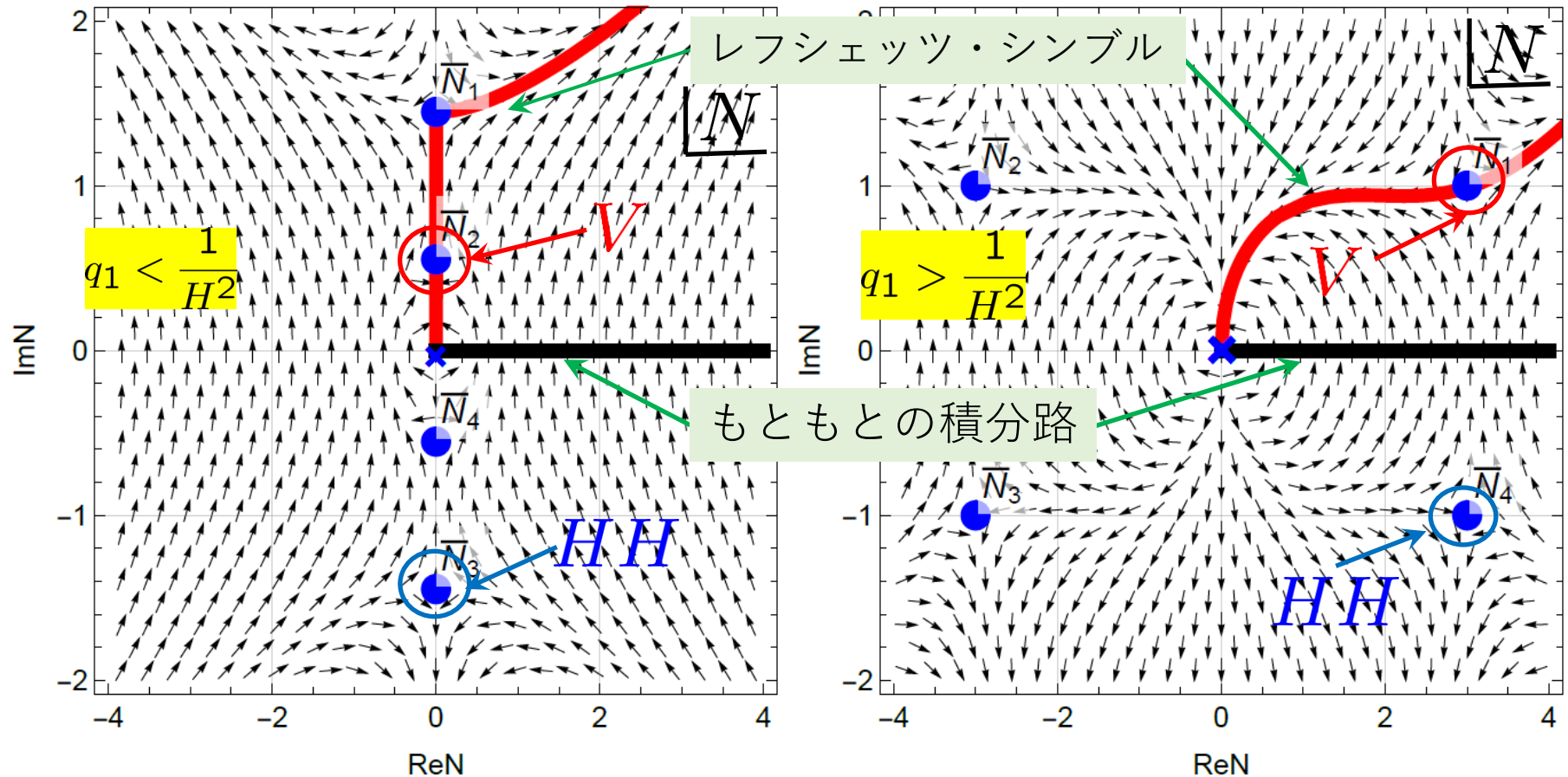
$q(t)$ に関する経路積分は、ガウス積分で実行可能。

残るラプス関数 N に関する積分を鞍点近似で評価する。

$$\Lambda \ll 1$$

ラプス関数の鞍点とレフシッツ・シンブル

ディレクレ境界条件 $\begin{cases} q(0) = 0 : \text{no boundary} \\ q(1) = q_1 \end{cases}$



ピカル・レフシッツ理論によると、Vilenkinの理論がrelevantな鞍点として選ばれる。

鞍点が表す時空（初期）

$$ds^2 = -\frac{N^2}{q(t)} dt^2 + q(t) d\Omega_3^2$$

$$q(1) < \frac{1}{H^2} \quad N^* = \frac{1 - \sqrt{1 - H^2 q_1}}{H^2} i \quad \Lambda = 3H^2$$

$$q(t) = -H^2 |N^*|^2 t^2 + 2|N^*| t$$

純虚数！

時間座標の変更： $t = \frac{1}{H^2 |N^*|} (1 - \cos H\tau)$

$$q(t) = \frac{1}{H^2} \sin^2 H\tau$$

$$dt = \frac{d\tau}{H |N^*|} \sin H\tau$$



半径 $\frac{1}{H}$ の4次元球面の一部

$$0 \leq \tau \leq \frac{1}{H} \arccos \sqrt{1 - H^2 q_1} \left(< \frac{\pi}{2H} \right)$$

$$ds^2 = d\tau^2 + \frac{1}{H^2} \sin^2 H\tau d\Omega_3^2$$

ユークリッド時空（虚時間）

鞍点が表す時空（後期）

$$ds^2 = -\frac{N^2}{q(t)} dt^2 + q(t) d\Omega_3^2$$

$$q(1) > \frac{1}{H^2}$$

$$N^* = \frac{\sqrt{H^2 q_1 - 1}}{H^2} + \frac{i}{H^2}$$

$$\Lambda = 3H^2$$

$$q(t) = H^2 (N^*)^2 t^2 - 2i N^* t$$

q_1 とともに、
実部が増大

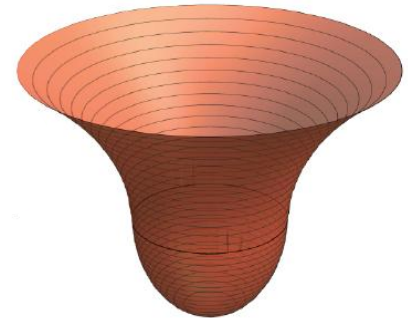
時間座標の変更： $t = \frac{1}{H^2 N^*} (\sinh H\tau + i)$

$$q(t) = \frac{1}{H^2} \cosh^2 H\tau$$

$$dt = \frac{d\tau}{H N^*} \cosh H\tau$$

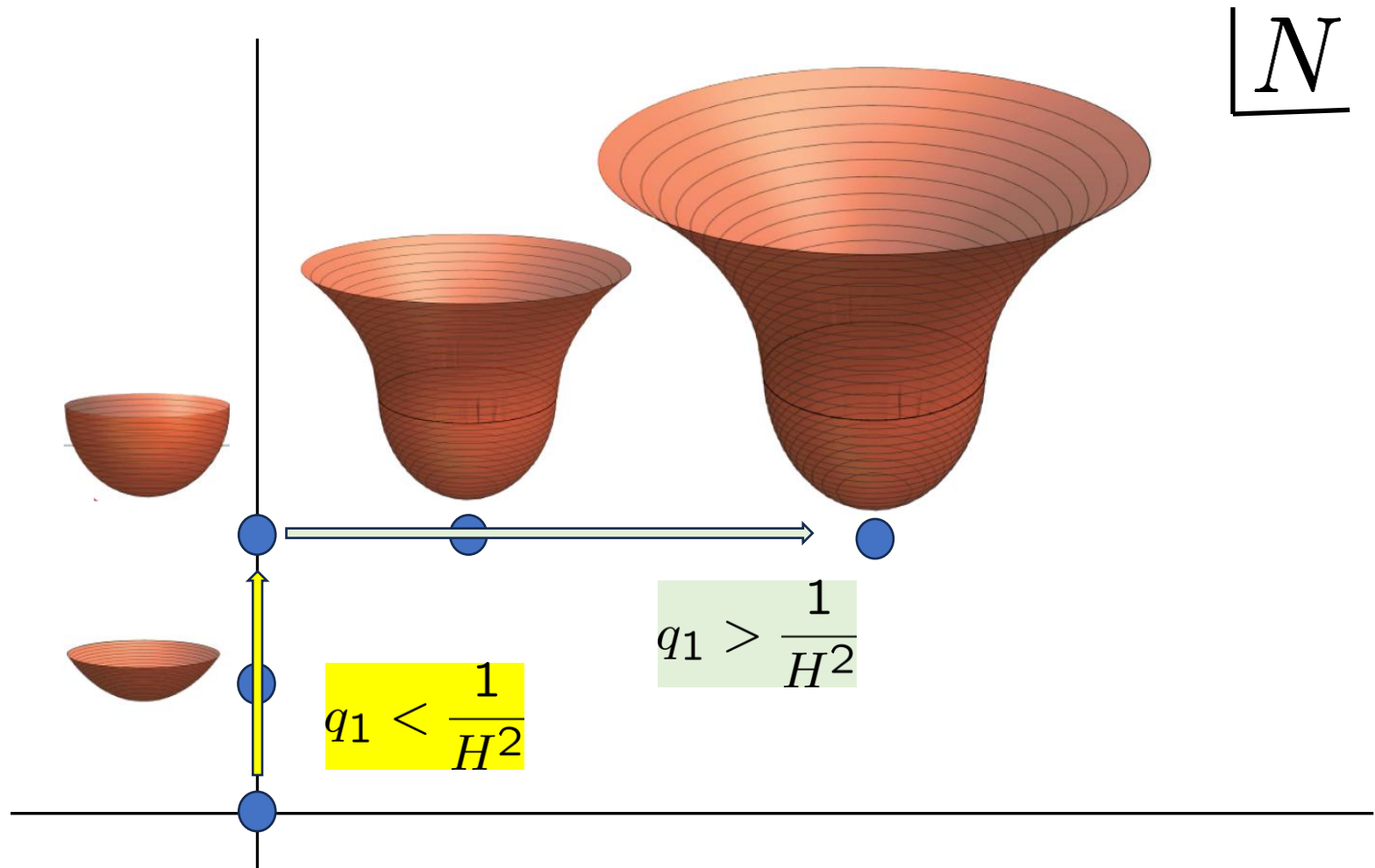
$$ds^2 = \underbrace{-d\tau^2}_{\text{実時間の出現}} + \frac{1}{H^2} \cosh^2 H\tau d\Omega_3^2$$

(3+1)次元ドジッター時空の一部



実時間の出現、空間の指数関数的膨張

q_1 に伴う時空の変化



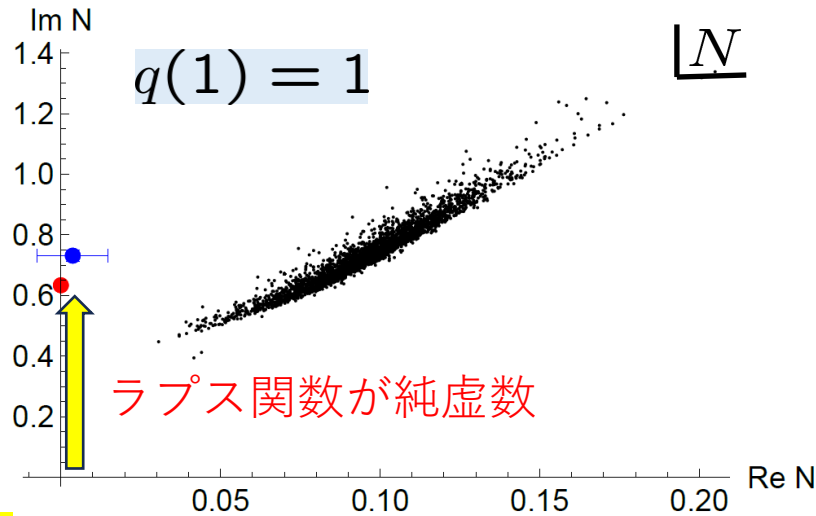
虚時間をもつ時空から始まり、実時間をもつ膨張時空に。

(量子トンネル効果を表す)

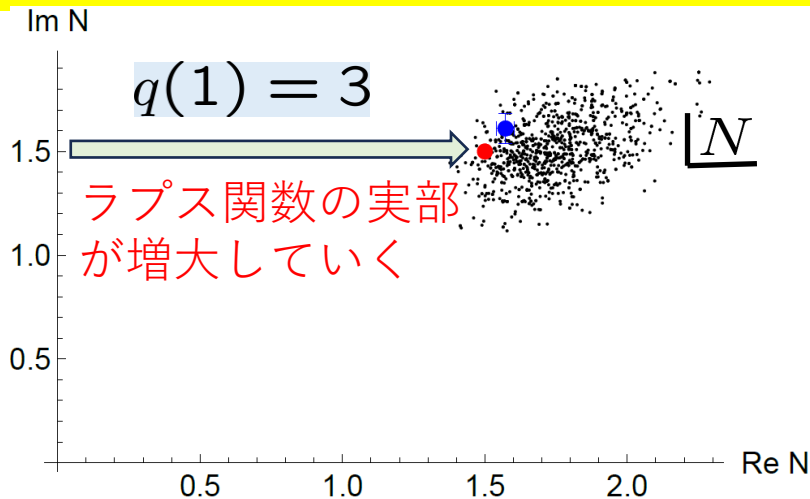
量子宇宙論のシミュレーション

Chien-Yu Chou and JN,
JHEP 05 (2025) 142, arXiv: 2407.17724 [gr-qc]

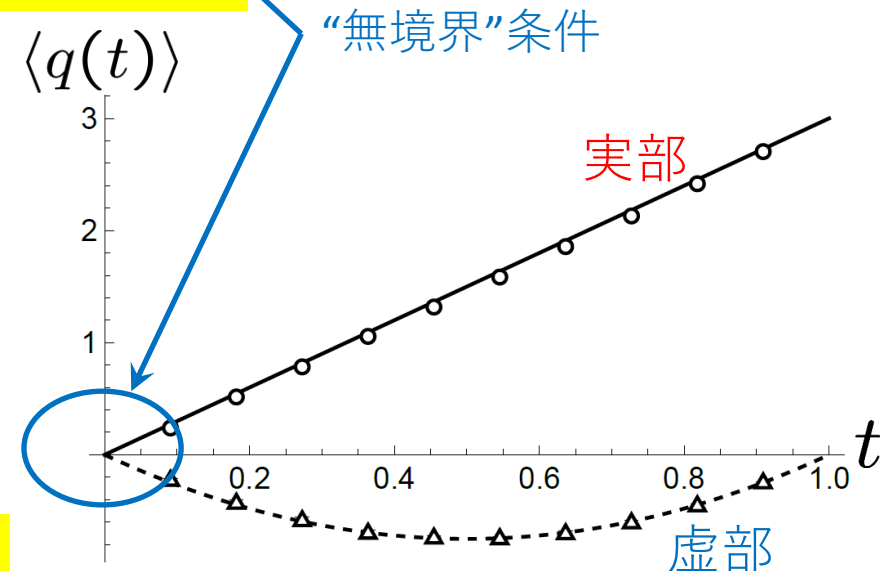
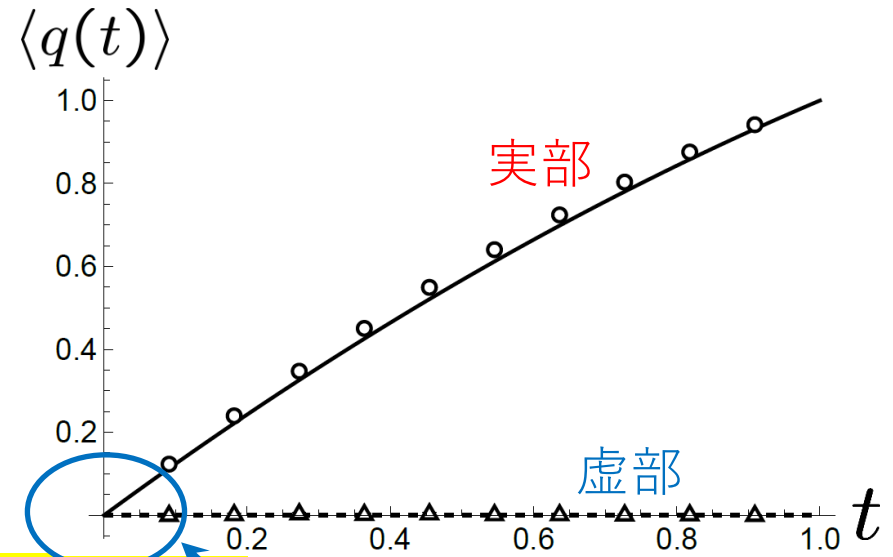
$$\Lambda = 3H^2 = 2$$



➤ 宇宙は虚時間から始まった (量子トンネル効果)



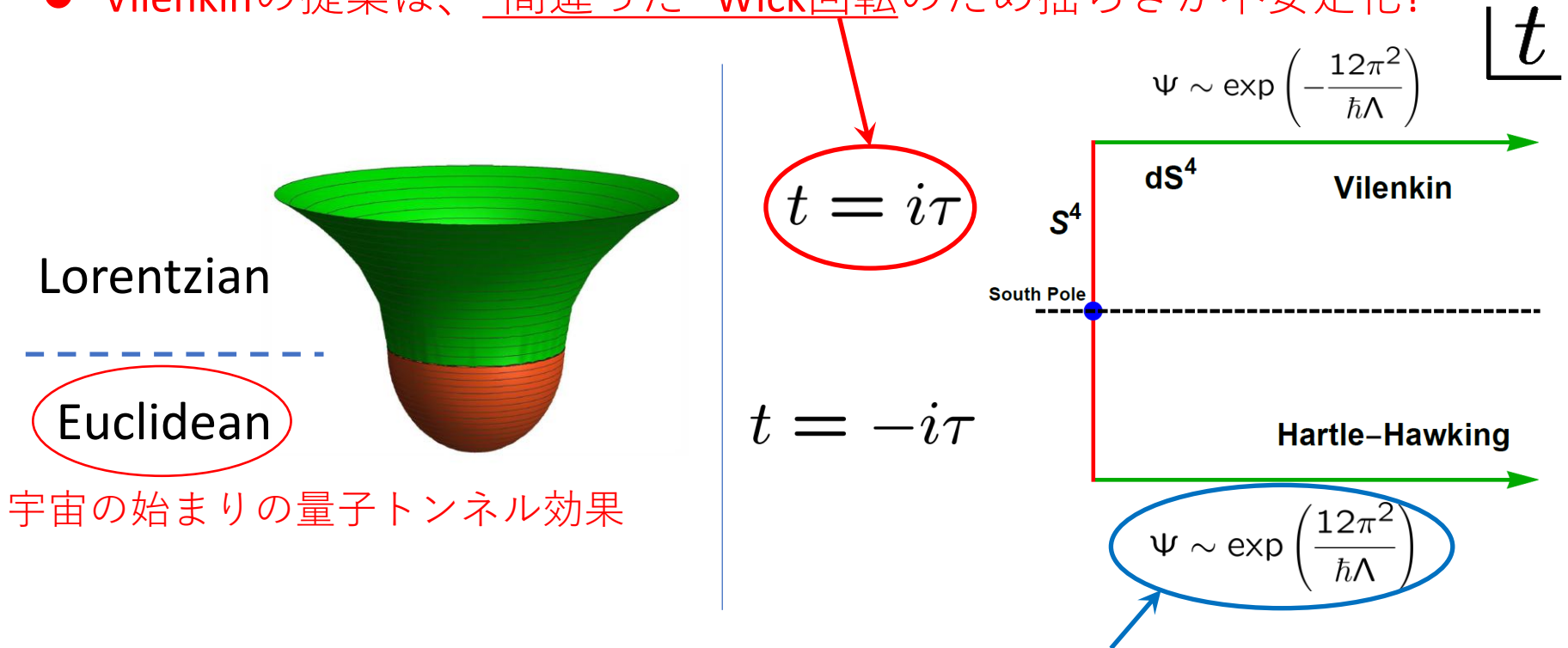
➤ 実時間の出現と空間の指数関数的膨張



量子宇宙論の今後の課題

c.f.) 昨年の松井宏樹氏の講演

- Vilenkinの提案は、“間違った” Wick回転のため揺らぎが不安定化?



- Hartle-Hawkingの提案は、 $\Lambda = 0$ が支配的になるため、インフレーションのシナリオと相容れないように見える。
- 実際にテンソル・モードや物質場を入れて、揺らぎの不安定化の問題を摂動論に依らずに検証。本当にこれが問題なのかを明らかにしたい。

4. まとめと展望

まとめと展望

- 「量子系の実時間発展を経路積分で調べる」という新しい研究の方向性

多自由度系の量子力学（自由度が大きいことによる計算コスト）
量子重力（一般座標不変性を保つような計算）
超弦理論（時空がアприオリには無く、創発するような理論）
などにおいて、大きなメリットがある。

- 振動する積分を**well-defined**にして、具体的な計算が可能。
（ピカルル・レフシェッツ理論） （レフシェッツ・シンブル法）
- 量子トンネル効果や量子デコヒーレンス効果が、
「複素鞍点」（半古典的な複素軌道）で捉えられる。
- 量子宇宙論やIKKT行列模型の数値シミュレーションにより
「宇宙の始まり」の研究が可能。