

BFSS行列模型の局所化手法による 三点振幅の厳密計算

筑波大学D2 村山 祐明

伊敷 吾郎氏、浅野 侑磨氏（&加藤 瑠和氏）との共同研究
JHEP09(2026)068に基づく

離散的手法による場と時空のダイナミクス2026
2026/9/11@R-CCS

BFSS行列模型

$$S = \frac{1}{g^2} \int d\tau \text{Tr} \left[\frac{1}{2} (DX_M)^2 - \frac{1}{4} [X_M, X_N]^2 + \text{fermion} \right] \quad \left\{ \begin{array}{l} M, N = 1 \sim 9 \\ X_M: N \times N \text{エルミート行列} \end{array} \right.$$

- 10D $U(N)$ 超対称Yang-Mills理論を1Dに次元簡約した模型
- M理論の非摂動的定式化を与えると期待される。

平坦時空

$$x^- \sim x^- + 2\pi R$$

$$p_- = N/R$$

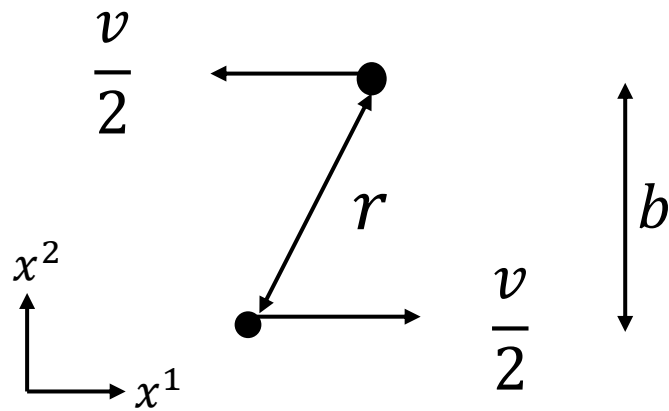
light cone運動量 p_- $\leftrightarrow$ 行列サイズ N

- $SO(9)$ 回転対称性&超対称性はあるが、11D Lorentz対称性は見えない。
→light-cone方向の物理は記述が難しい

対応例：2点間ポテンシャル

[Becker-Becker-Polchinski-Tseytlin, etc.]

- ・2点粒子に対応する配位を考える。



背景と揺らぎにわける: $X^i = \hat{X}^i + Y^i$

$$\hat{X}^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v\tau & 0 \\ 0 & -v\tau \end{pmatrix}, \hat{X}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}, \hat{X}^{3,\dots,9} = 0$$

- ・1-loop有効ポテンシャルを求めると $(r = \sqrt{(v\tau)^2 + b^2})$

$$V = -\frac{15}{16} \cdot \frac{v^4}{r^7} + \mathcal{O}\left(\frac{v^6}{r^{11}}\right) \quad \dots \quad \text{M理論(11次元超重力)の結果と一致}$$

※ただしlight-cone方向の運動量(行列サイズ)は変わらない。

先行研究：3点振幅の対応

[A. Herderschee, J. Maldacena, J.Phys. A 57 (2024) 16, 165401]

- ・ M理論の3点振幅とBFSSの分配関数(3点振幅に対応する境界条件)の一致を示した。
- ・ light-cone運動量の受け渡しがある($N_1 \rightarrow N_2 + N_3$)散乱過程を計算した。

$$\left[N_1 \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c} \left[N_2 \right] \\ \left[N_3 \right] \end{array} \right]$$

- ・ ただし仮定(双対性, 時間分割等)があり、間接的(2Dでの解析)である。
→直接計算したい:**局所化**を使う。

局所化：分配関数を計算する手法

$$Z = \int DX \exp[-S] \longrightarrow Z_t := \int DX \exp[-S - tQV] \left[\begin{array}{l} Q: \text{超対称変換} (QS = 0) \\ Q^2 V = 0, \text{ Re}[QV] \geq 0 \end{array} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Z_t = - \int DX (QV) \exp[-S - tQV] = - \int DX Q (V \exp[-S - tQV]) = 0$$

$$Z = Z_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} Z_t = \sum_{X_{(i)}: QV \text{ の鞍点}} \exp(-S[X_{(i)}]) Z_{1-loop}^{(i)} \leftarrow \text{厳密計算！}$$

本研究の内容

BFSSで3点振幅を局所化で評価 → M理論との対応を確認

目次

1. Introduction
2. M理論の3点振幅
3. BFSS行列模型の3点振幅
4. 局所化
5. まとめと展望

目次

1. Introduction

2. M理論の3点振幅

3. BFSS行列模型の3点振幅

4. 局所化

5. まとめと展望

2. M理論の3点振幅 [Herderschee, Maldacena]

- ・ 始/終状態に局在するM2-braneをソースとして、graviton($p_i^2 = 0, i = 1, 2, 3$)が散乱。
- ・ 運動量保存より $p_1 + p_2 + p_3 = 0$ となるが、直ちに $p_1 \propto p_2 \propto p_3$ になってしまう。
- ・ 非自明な散乱過程を記述するために、空間方向をWick回転する。

$$\begin{aligned} ds^2 &= -2dx^+ dx^- - dy^2 + dx^2 + \dots \\ &= -2dx^+ dx^- + dXd\Phi + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^\pm &: \text{light-cone座標、} x^- \sim x^- + 2\pi R \\ X &= x + y, \Phi = x - y \end{aligned}$$

$$p^2 = -2p_+ p_- + 4p_X p_\Phi + \vec{p}^2$$

- ・ 今回は4次元のkinematicsで考える: $p_\mu = (p_+, p_-, p_\Phi, p_X, \vec{p}) = (p_+, p_-, p_\Phi, p_X, 0)$
on-shell条件: $p^2 = -2p_+ p_- + 4p_\Phi p_X = 0$
 $p_+ = p_X = 0$ ならOK

$$p_\mu = (p_+, p_-, p_\Phi, p_X)$$

$$p_\mu^1 = \left(0, -\frac{N_1}{R}, p^{cm}, 0\right)$$

$$p_\mu^2 = \left(0, \frac{N_2}{R}, \mathbf{p} - \frac{N_2}{N_1} p^{cm}, 0\right)$$

$$p_\mu^3 = \left(0, \frac{N_3}{R}, -\mathbf{p} - \frac{N_3}{N_1} p^{cm}, 0\right)$$

N_i : light-cone運動量
($N_1 = N_2 + N_3$)

$\mathbf{p}$: “相对”運動量

p^{cm} : “重心”運動量

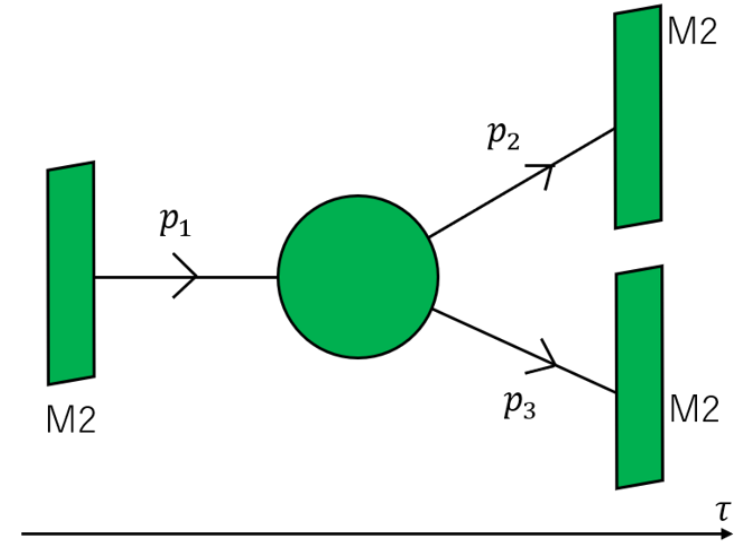
- 超対称性の自由度は32個,
3点振幅が保つものは4個: $\begin{cases} \Gamma^- \epsilon = 0 \\ \Gamma^{89} \epsilon = i\epsilon \\ \Gamma^{0123} \epsilon = i\epsilon \end{cases}$

- 3点振幅は11D super Poincare対称性によって決定される:

$$\mathcal{A}_3 = \mathbf{p}^2 \frac{2CN_1^4}{N_2^2 N_3^2} \delta(\Sigma_i p_+^i) \delta(\Sigma_i p_-^i) \delta^9(\Sigma_i \vec{p}^i)$$

↑

この運動量依存性を行列模型から確かめる。



	1,2,3	その他
M2	○	×

目次

1. Introduction

2. M理論の3点振幅

3. BFSS行列模型の3点振幅

4. 局所化

5. まとめと展望

行列模型での3点振幅

[Herderschee, Maldacena]

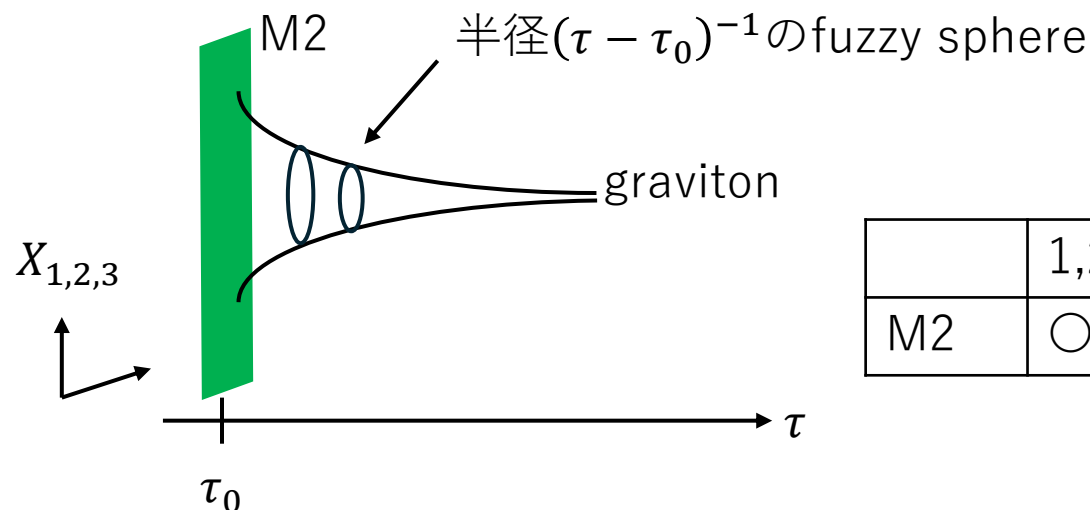
- $[\tau_0, \tau_1]$ 上のBFSS行列模型を考える:

$$S = \frac{1}{g^2} \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \operatorname{Tr} \left[\frac{1}{2} (DX_M)^2 - \frac{1}{4} [X_M, X_N]^2 + \text{fermion} \right]$$

- gravitonのソースとして局在するM2-braneに対応するもの:Nahm pole [Diaconescu]

$$X_a \rightarrow \frac{J_a^{[N]}}{\tau - \tau_0} \quad (\tau \rightarrow \tau_0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 1, 2, 3 \\ J_a^{[N]}: N \text{次元既約表現の} \\ SU(2) \text{生成子} \end{array} \right.$$



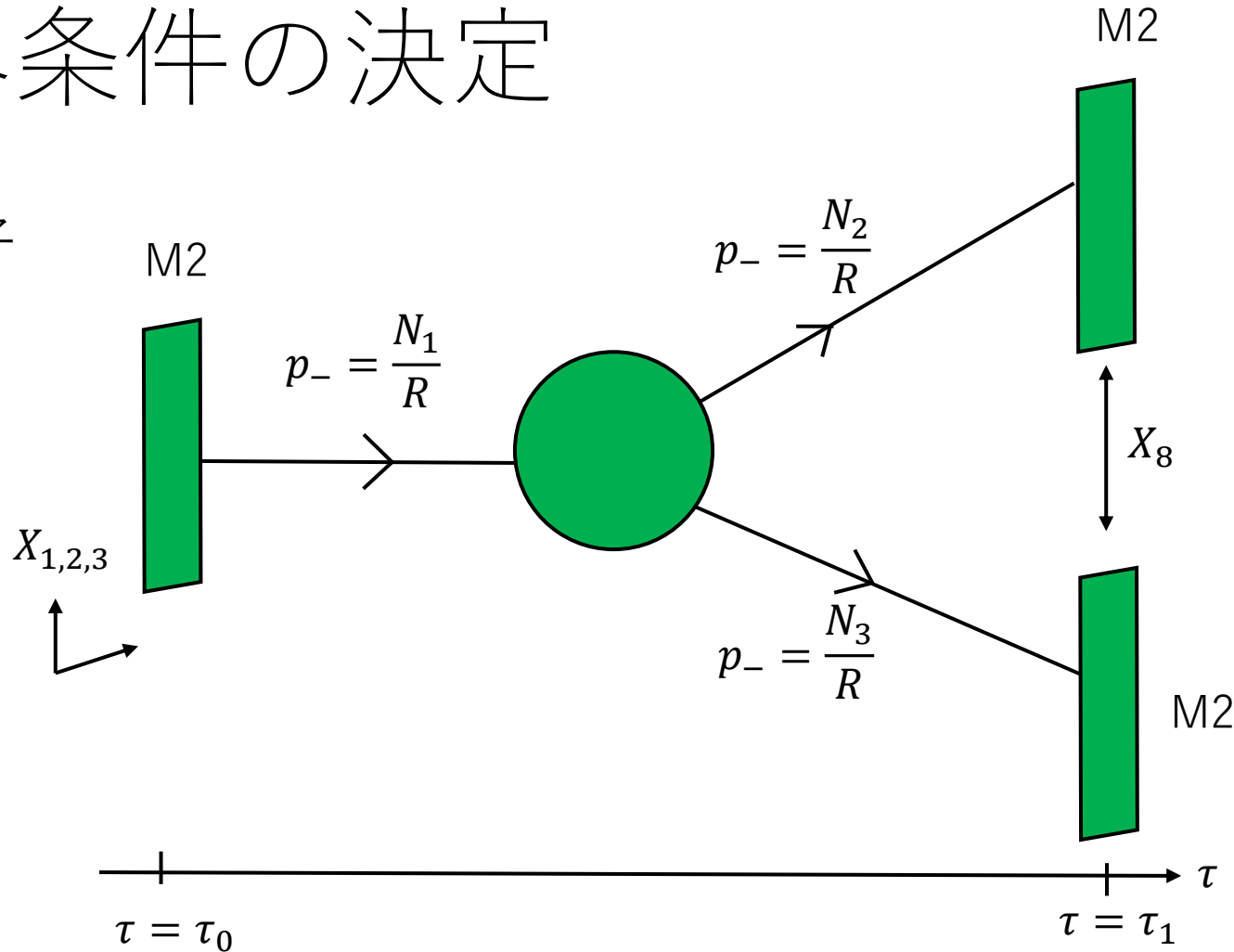
	1,2,3	その他
M2	○	×

境界条件の決定

始状態: 1粒子
 $\Leftrightarrow$ 既約表現

$$X_a \sim \frac{J_a^{[N_1]}}{\tau - \tau_0}$$

$$X_8 \sim x_1 \mathbf{1}_{N_1}$$



終状態: 2粒子
 $\Leftrightarrow$ 2個の既約表現

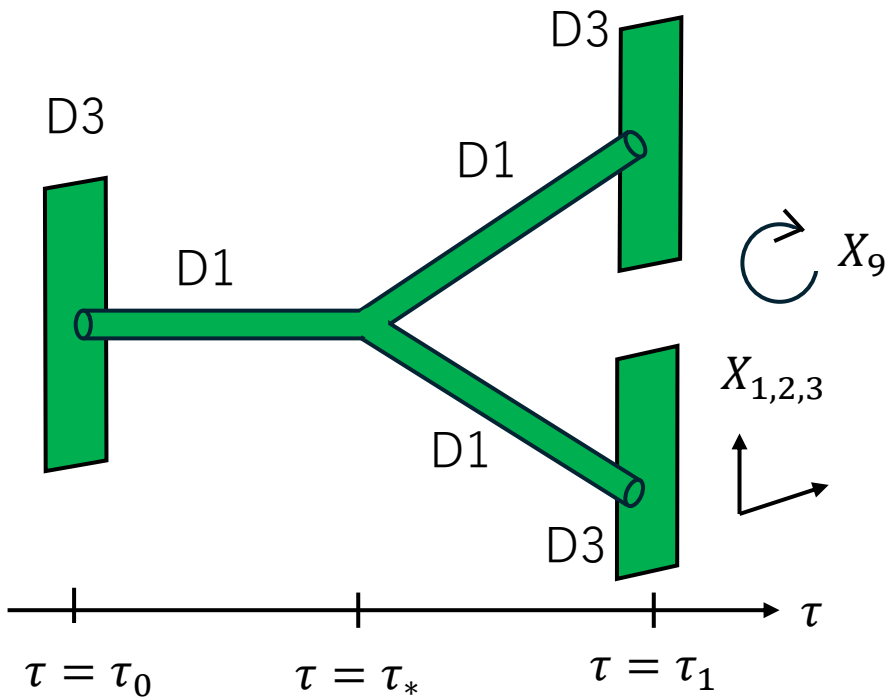
$$X_a \sim \frac{J_a^{[N_2]} \oplus J_a^{[N_3]}}{\tau - \tau_1}$$

$$X_8 \sim x_2 \mathbf{1}_{N_2} \oplus x_3 \mathbf{1}_{N_3}$$

	1,2,3	その他
M2	○	×

2D行列模型での計算 [Herderschee, Maldacena]

- 9方向もコンパクト化してT-dualize: $1D \rightarrow 2D$
→ D3が境界に局在、D1が散乱する描像となる。



Herderschee&Maldacenaは間接的に振幅を求めた:
(T-duality, open-closed duality, 散乱過程の分割,,等)

$$\lim_{\substack{\tau_0 \rightarrow -\infty \\ \tau_1 \rightarrow +\infty}} Z_{2D}^{M.M.} = \mathcal{A}_{3pt}^{M-thy}$$

本研究では直接的に評価する。

目次

1. Introduction

2. M理論の3点振幅

3. BFSS行列模型の3点振幅

4. 局所化

5. まとめと展望

$U(1)$ の経路積分

$$X_M = X_M^{U(1)} + X_M^{SU(N)} = x_M \mathbf{1}_N + X_M^{SU(N)}$$

- $U(1)$ partはfreeなので、局所化を使わずともガウス積分で計算可能。
→ 重心運動量 p^{cm} の運動量保存則が出る。
- 以降では $SU(N)$ partについて話を進める。

BFSS行列模型

$$S = \frac{1}{g^2} \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \operatorname{Tr} \left(\frac{1}{2} \sum_{M=0}^8 (DX_M)^2 + \frac{1}{4} \sum_{M,N=0}^8 [X_M, X_N]^2 + \frac{1}{2} \Psi^T C^\dagger \Gamma^9 D\Psi - \frac{i}{2} \sum_{M=0}^8 \Psi^T C^\dagger \Gamma^M [X_M, \Psi] \right)$$

X_0 : Wick回転した空間方向($\sim y$)

$X_{1\sim 8}$: 一般の空間方向

$X_9 = A$: ゲージ場, $D = \partial_\tau - i[A, *]$

$$X := X_8 - X_0, \quad \Phi := X_8 + X_0$$



粒子を引き離す方向、**相対運動量** p を持たせる

超対称性

- $([\tau_0, \tau_1]$ ではなく) $(-\infty, +\infty)$ 上の理論は、以下の超対称性を持つ。

$$\begin{aligned}\delta X^M &= -\epsilon^T C^\dagger \Gamma^M \Psi \\ \delta \Psi &= \frac{1}{2} F_{MN} \Gamma^{MN} \epsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{MN} &= -i[X_M, X_N] \quad (M, N \neq 9) \\ D_M \Psi &= -i[X_M, \Psi] \quad (M \neq 9)\end{aligned}$$

- 局所化の計算のために、超対称性を1つ選ぶ:

$$\left. \begin{aligned}\Gamma^{11} \epsilon &= \epsilon \\ \Gamma^{80} \epsilon &= \epsilon \\ \Gamma^{9123} \epsilon &= \epsilon\end{aligned} \right\} \leftarrow \text{境界条件からの要請}$$
$$\left. \begin{aligned}\Gamma^{1245} \epsilon &= \epsilon \\ \Gamma^{1346} \epsilon &= \epsilon\end{aligned} \right\} \leftarrow \begin{array}{l} \text{計算のために} \\ \text{手で課した条件} \end{array}$$

超対称性の拡張

$E.O.M. = 0 (\Leftrightarrow \text{on-shell})$
 の時に限り代数が閉じる



- on-shell SUSY代数: $\delta^2 = (\text{並進}) + (\text{ゲージ変換}) + E.O.M.$
- off-shellでもSUSY代数が閉じるために、超対称性を拡張する[Berkovits]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon^T C^\dagger \Gamma^M \nu^I = 0 \\ \nu_I^T C^\dagger \Gamma^M \nu^J = \epsilon^T C^\dagger \Gamma^M \epsilon \delta_I^J \\ \frac{1}{2} (\epsilon^T C^\dagger \Gamma_M \epsilon) \left(\frac{1 + \Gamma^{11}}{2} \Gamma^M C \right)_{\alpha\beta} = \epsilon_\alpha \epsilon_\beta + \nu_\alpha^I \nu_{\beta I} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \nu^I = \Gamma^{I9} \epsilon \\ (I = 1 \sim 7) \end{array}$$

$$\text{off-shell SUSY変換} \left\{ \begin{array}{l} \delta X^M = -\epsilon^T C^\dagger \Gamma^M \Psi \\ \delta \Psi = \frac{1}{2} F_{MN} \Gamma^{MN} \epsilon + K^I \nu_I \\ \delta K_I = (\nu^I)^T C^\dagger \Gamma^M D_M \Psi \end{array} \right. \quad K^I: \text{補助場}$$

Doublet構造

- SUSYとBRSTを組み合わせる: $Q := \delta + \delta_{BRST}$
- 変数変換の下、 Q はnilpotent:

$$\begin{aligned} Z_0 &:= X_{M'} & Z'_0 &:= -i w^0 \tilde{\Psi}_{M'} \\ Z_1 &:= (-i w^0 \Upsilon_I, C, \tilde{C}) & Z'_1 &:= (\tilde{H}_I, i w^0 \tilde{\Phi}, -i B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q Z_i &= Z'_i \\ Q Z'_i &= 0 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Psi &= \Psi_{M'} \Gamma^{0M'} \epsilon + \Upsilon_I v^I \\ H^I &:= -i w^0 (K_I - F_{9I}) \\ \Phi &:= X^8 - X^0 \\ \tilde{\Psi}_{M'} &:= \Psi_{M'} - \frac{i}{w^0} D_{M'} C \\ \tilde{H}_I &:= H_I - w^0 \{C, \Upsilon_I\} \\ \tilde{\Phi} &:= \Phi - \frac{1}{w^0} C^2 \\ w^0 &:= \epsilon^T i C^\dagger \Gamma^0 \epsilon \\ w^{09IJK} &:= \epsilon^T i C^\dagger \Gamma^{09IJK} \epsilon \\ M' &:= 1 \sim 9 \\ I, J, K &:= 1 \sim 7 \end{aligned} \right.$$

線分上のBFSS行列模型

$$S = \frac{1}{g^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \operatorname{Tr} \left(\frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} + \frac{1}{2} \Psi^T C^\dagger \Gamma^M D_M \Psi + \frac{1}{2} K_I^E K^{EI} \right)$$

- ・ 経路積分が収束するために $\begin{cases} \Phi \rightarrow i\Phi' \\ K_I \rightarrow iK_I^E \end{cases}$ と解析接続 [cf: Pestun]
- ・ この作用は Q -不変: $QS = 0$
- ・ しかし、 $[\tau_0, \tau_1]$ 上のBFSSを考えると Q -不変ではない:

$$S = \frac{1}{g^2} \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \operatorname{Tr} \left(\frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} + \frac{1}{2} \Psi^T C^\dagger \Gamma^M D_M \Psi + \frac{1}{2} K_I^E K^{EI} \right)$$

$$QS = \frac{w^0}{g^2} \operatorname{Tr} \left[\frac{i}{2} \left(K_I - F_{9I} - \frac{w^{09IJK}}{2w^0} F_{JK} \right) \Psi_I - \frac{i}{2} D\Phi \Psi_8 - \frac{1}{2} \Psi_9 [\Phi, X_8] - \frac{1}{2} \Upsilon_I [\Phi, X_I] \right]_{\tau_0}^{\tau_1} \neq 0$$

境界項

- ・作用に次の項を追加する:

$$S_b := \frac{1}{g^2} \text{Tr} \left[-\frac{w^{09IJK}}{w^0} X_I F_{JK} - \frac{iw^0}{2} \Psi_9 \Psi_8 - \frac{iw^0}{2} \Upsilon_I \Psi_I \right]_{\tau_0}^{\tau_1} \quad \left\{ \begin{array}{l} w^{09IJK} = \epsilon^T i C^\dagger \Gamma^{09IJK} \epsilon \\ w^0 = \epsilon^T i C^\dagger \Gamma^0 \epsilon \end{array} \right.$$

$\rightarrow Q(S + S_b) = 0$ 線分上でも Q -対称に定式化できた!

※境界項は $\tau = \tau_0, \tau_1$ の波動関数に対応する。

特に1項目は”Myers term”で、境界のM2-braneに対応する。

$\frac{J_a^{[N]}}{\tau - \tau_0}$ による、 $\tau \rightarrow \tau_0$ の発散をキャンセルする。

Enhanced SUSY

- w^{09IJK} と w^0 は今の超対称性の選び方に依存する。
 $S + S_b$ は ϵ 方向の超対称性を保つことが保証されている。

$$S_b = \frac{1}{g^2} \text{Tr} \left[-\frac{w^{09IJK}}{w^0} X_I F_{JK} - \frac{iw^0}{2} \Psi_9 \Psi_8 - \frac{iw^0}{2} \Upsilon_I \Psi_I \right]_{\tau_0}^{\tau_1} \quad \left\{ \begin{array}{l} w^{09IJK} = \epsilon^T i C^\dagger \Gamma^{09IJK} \epsilon \\ w^0 = \epsilon^T i C^\dagger \Gamma^0 \epsilon \end{array} \right.$$

- 一般に、 S_b がより高い対称性を持つように境界条件を選べばSUSY自由度は増える。

例) $X^4, X^5, X^6, X^7 = 0$ とすれば、 X^1, X^2, X^3 を回す $SO(3)$ 対称性がある。

→ 超対称性の自由度は4個

$$\begin{aligned} \Gamma^{11} \epsilon &= \epsilon \\ \Gamma^{80} \epsilon &= \epsilon \\ \Gamma^{9123} \epsilon &= \epsilon \\ \Gamma^{1245} \epsilon &= \epsilon \\ \Gamma^{1346} \epsilon &= \epsilon \end{aligned}$$

境界条件の設定

$$X_a(\tau) \sim \begin{cases} \frac{J_a^{[N_1]}}{\tau_0 - \tau} & (\tau \rightarrow \tau_0) \\ \frac{J_a^{[N_2]} \oplus J_a^{[N_3]}}{\tau_1 - \tau} & (\tau \rightarrow \tau_1) \end{cases}$$

M2-braneの条件

$$D\Phi \rightarrow 0 \quad (\tau \rightarrow \tau_0, \tau_1)$$

$$DX \rightarrow \begin{cases} 0 & (\tau \rightarrow \tau_0) \\ \frac{p_2}{N_2} \mathbf{1}_{N_2} \oplus \frac{p_3}{N_3} \mathbf{1}_{N_3} & (\tau \rightarrow \tau_1) \end{cases}$$

相対運動量 $\textcolor{red}{p} := p_2 = -p_3$

$$X_{4,5,6,7} \rightarrow 0 \quad (\tau \rightarrow \tau_{0,1})$$

- fermionに関しては、 Q -対称性により決定される。

局所化

$$Z \rightarrow Z_t := \int DX e^{-S - tQV}$$

・作用に $tQ(V + V_{gh} + V_b)$ を加える:

$$V = \int d\tau \text{Tr}[\bar{\delta}\Psi^T \Psi] = \int d\tau \text{Tr} \left(-\frac{1}{2} F_{MN} \epsilon^T i C^\dagger \Gamma^0 \Gamma^{MN} \Psi - K^I v_I^T i C^\dagger \Gamma^0 \Psi \right)$$

$$V_{gh} = \int d\tau \text{Tr} \left(\tilde{C} (\partial X_9 - i[\hat{X}_a, X_a]) + \frac{i\xi}{2} \tilde{C} B \right)$$

$$V_b = i \text{Tr}[(DX)C]_{\tau_0}^{\tau_1}$$

実際に $Z = \sum_{\substack{Q(V+V_{gh}+V_b) \\ \text{の鞍点}}} e^{-S^{(i)}} Z_{1-loop}^{(i)}$ を求めていく。

- ①鞍点を求める
- ②鞍点での作用 $S^{(i)}$ を評価
- ③鞍点周りの $Z_{1-loop}^{(i)}$ を評価
- ④各鞍点で和をとる

QV の鞍点方程式

$$D^{N'} D_{N'} X = D^{N'} D_{N'} \Phi' = 0 \quad \leftarrow \exp[it \blacktriangle] \text{の部分。"位相の停留条件"}$$

$$w^0 F_{9I} - \frac{1}{2} w^{09IJK} F_{JK} = 0 \quad \leftarrow \exp[-t(\blacksquare)^2] \text{の中身。}$$

先に $X^{4,5,6,7} = 0$ を示すことができる。
この条件を使うと

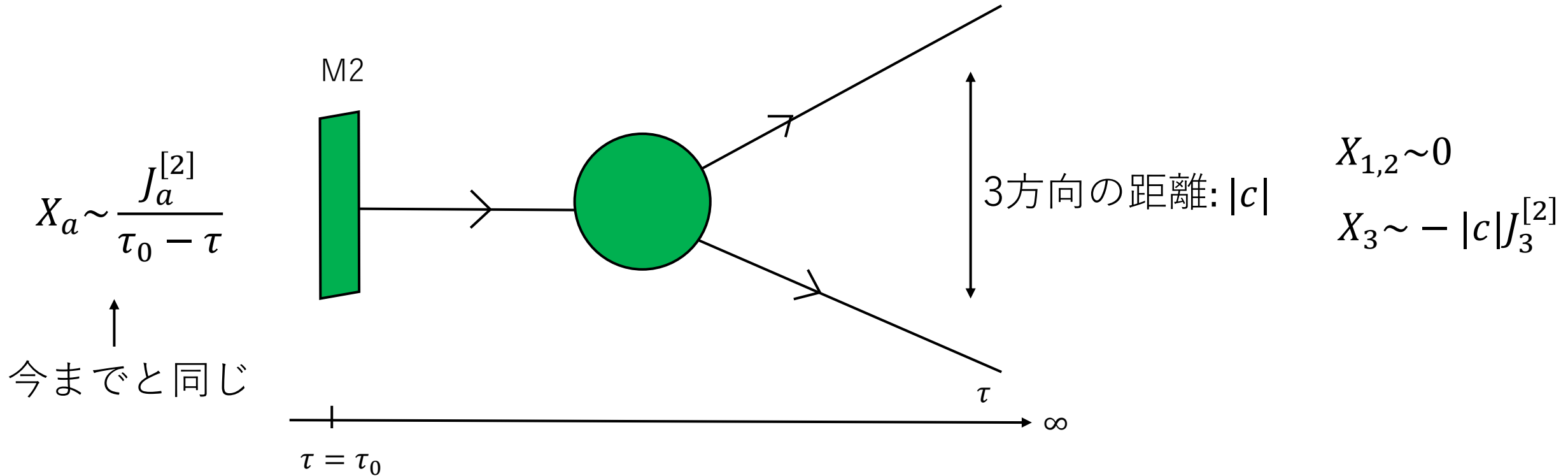
$$\partial^2 \Phi' - [X_a, [X_a, \Phi']] = 0$$

$$\partial^2 X - [X_a, [X_a, X]] = 0$$

$$\partial X_a + \frac{i}{2} \epsilon_{abc} [X_b, X_c] = 0 \quad \leftarrow \text{"Nahm eq."}$$

これを満たす解を
全てを求める必要がある。

- Nahm eq. は一般の行列サイズ N での解はわかっていない。
- この問題を回避するために、 $N = 2, \tau_1 \rightarrow \infty$ で議論を進める。
境界条件を以下のように変更する。



- 他の条件は全て同じ。

QV の鞍点

- $N = 2, \tau_1 \rightarrow \infty$ では、解が唯一で計算可能 [Braden, Cherkis, Quinones]

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{X}_a = \frac{c}{\sinh[c(\tau_0 - \tau)]} J_a^{[2]} \quad (a = 1, 2) \\ \hat{X}_3 = \frac{c}{\tanh[c(\tau_0 - \tau)]} J_3^{[2]} \\ \hat{X}_{4,5,6,7} = 0 \\ \hat{X} = -\frac{p}{|c|} \left(1 - \frac{c(\tau_0 - \tau)}{\tanh[c(\tau_0 - \tau)]} \right) J_3^{[2]} \\ \hat{\Phi}' = 0 \end{array} \right\} \tau \sim \tau_0 + \frac{1}{|c|} \text{ で振る舞いに変化 } (\sim \tau_*)$$

※一般の行列サイズ N において、
 1体 $\rightarrow N$ 体の境界条件なら同じ方法で原理的に解ける。
 (ただし計算量が膨大)

作用の評価

$$N = 2, \tau_1 \rightarrow \infty$$

$$Z = \sum_{\substack{Q(V+V_{gh}+V_b) \\ \text{の鞍点}}} e^{-S^{(i)}} Z_{1-loop}^{(i)} \stackrel{\downarrow}{=} e^{-(S+S_b)|_{saddle}} Z_{1-loop} \quad \text{を求める。}$$

- S : Nahm poleにより発散
 S_b : Myers termにより発散
 }
 両方 $\tau \rightarrow \tau_0$ での発散。

- cut off $\kappa > 0$ を導入して評価する: $\int_{\tau_0+\kappa}^{\infty} d\tau (\dots)$

$$\left. \begin{aligned} S|_{saddle} &= \frac{c^3}{2g^2} \frac{\cosh(c\kappa)}{\sinh^3(c\kappa)} \\ S_b|_{saddle} &= -\frac{c^3}{2g^2} \frac{\cosh(c\kappa)}{\sinh^3(c\kappa)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \lim_{\kappa \rightarrow 0} (S + S_b)|_{saddle} &= 0 \\ \therefore e^{-(S+S_b)|_{saddle}} &= 1 \end{aligned}$$

汎関数行列式の評価 $e^{-(S+S_b)}|_{saddle} \mathbf{Z}_{1-loop}$

・揺らぎの2次を求める: $V^{(2)} = (Z'_0 \quad Z_1) \begin{pmatrix} D_{00} & D_{01} \\ D_{10} & D_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z'_1 \end{pmatrix}$

$$QV^{(2)} = \underbrace{Z'_1(D_{10}Z_0 + D_{11}Z'_1)}_{\text{boson}} - \underbrace{(Z'_0D_{00} + Z_1D_{10})Z'_0}_{\text{fermion}}$$

$$Z_{1-loop} = \int DZ'_1 DZ'_0 DZ_1 DZ_0 \exp[-QV^{(2)}]$$

$$\begin{cases} Z_0 := X_{M'} \\ Z_1 := (-i\omega^0 \Upsilon_I, C, \tilde{C}) \\ Z'_0 := -i\omega^0 \tilde{\Psi}_{M'} \\ Z'_1 := (\tilde{H}_I, i\omega^0 \tilde{\Phi}, -iB) \\ QZ_i = Z'_i \\ QZ'_i = 0 \end{cases}$$

$$= \int DZ'_1 DZ'_0 \exp[-Z'_1 D_{11} Z'_1 + Z'_0 D_{00} Z'_0] \delta(D_{10}^\dagger Z'_1) \delta(D_{10} Z'_0)$$

$$= \int DZ'_1|_{\text{Coker} D_{10}} DZ'_0|_{\text{Ker} D_{10}} \exp[-Z'_1 D_{11} Z'_1 + Z'_0 D_{00} Z'_0]$$

$$\therefore Z_{1-loop} = \left(\frac{\det D_{00}|_{\text{Ker} D_{10}}}{\det D_{11}|_{\text{Coker} D_{10}}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$Z = e^{-S} Z_{1-loop} = Z_{1-loop} = \left(\frac{\det D_{00}|_{Ker D_{10}}}{\det D_{11}|_{Coker D_{10}}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\bullet \dim[Coker D_{10}] = 0$$

$$\bullet \dim[Ker D_{10}] = 4 \quad \left(\begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1 \\ \tilde{\Psi}_2 \\ \tilde{\Psi}_3 \\ \tilde{\Psi}_9 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} h_2 J_1^{[2]} \\ h_2 J_2^{[2]} \\ -h_1 J_3^{[2]} \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} h_2 J_2^{[2]} \\ -h_2 J_1^{[2]} \\ 0 \\ h_1 J_3^{[2]} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} h_1 J_3^{[2]} \\ 0 \\ h_2 J_1^{[2]} \\ -h_2 J_2^{[2]} \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ h_1 J_3^{[2]} \\ h_2 J_2^{[2]} \\ h_2 J_1^{[2]} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} h_1 = \frac{2T - \sinh 2T}{\sinh^2 T} \\ h_2 = \frac{2(\sinh T - T \cosh T)}{\sinh^2 T} \\ T := c(\tau_0 - \tau) \end{matrix} \right)$$

$$\bullet D_{00} \big|_{Ker D_{10}} \propto [\hat{X}, *] \propto p$$

$$\therefore Z \propto p^{\frac{\dim[Ker D_{10}]}{2}} = p^2$$

M理論の3点振幅の依存性と一致する!

5. まとめと展望

- ・ 線分 $[\tau_0, \tau_1]$ 上で4自由度の超対称性を持つBFSS行列模型を定義できた。
- ・ BFSS行列模型に局所化を適用することに成功した。
特に $N = 2, [\tau_0, \infty)$ において3点振幅がM理論と対応することを直接確認した。
- ・ 今後より一般の状況(large N or N 点振幅)に拡張したい。

M理論との対応を考えるには

- finite N BFSS行列模型はDLCQ M理論と対応すると予想される。
- M理論振幅は平坦11Dのものなので、比較のためには
 $p_- = N/R$ を連続にするために $R \rightarrow \infty$ (強結合), $N \rightarrow \infty$ が必要。
- ただし、3点振幅に関しては N が有限でも対応が成立していると示唆される。
[Herderschee, Maldacena]
- $N = 2$ での解析なので、 $R \rightarrow \infty$ としたら $p_- = 0$ になってしまうが、
振幅のoverallが変わるだけで p^2 依存性は変わらない。

$$\mathcal{A}_3 = \textcolor{red}{p}^2 \frac{2CN_1^4}{N_2^2 N_3^2} \delta(\Sigma_i p_+^i) \delta(\Sigma_i p_-^i) \delta^9(\Sigma_i \vec{p}^i)$$

ご清聴ありがとうございました!