

グラフ上のユニタリー行列模型の双対性と スペクトル曲線について



松浦 壮

Collaboration with

太田 和俊 @ 明治学院大学



based on

arXiv:2607.27935 + α

Plan of the talk

1. Artin-Ihara L関数と拡張Kazakov-Migdal模型
2. ヤング図から見たサイクルグラフ上のFKM模型
3. 液滴描像とスペクトル曲線
4. オリジナルKazakov-Migdal模型の1次相転移について（進行中）

Artin-Ihara L関数と 拡張Kazakov-Migdal模型

伊原ゼータ関数

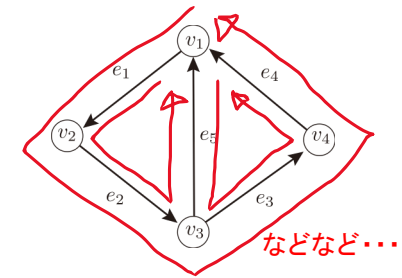
リーマンゼータ関数：一番有名なゼータ関数

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad (\text{オイラー積表示})$$

大雑把に言って、ゼータ関数とは「素なる何か」のオイラー積

伊原ゼータ関数：一番簡単なグラフ上のゼータ関数

$$\zeta_{\Gamma}(q) \equiv \prod_{[C]: \text{primitive reduced}} \frac{1}{1 - q^{\ell(C)}}$$



グラフ上の「素サイクル」の長さによるオイラー積で定義されるゼータ関数
(正確には既縮な原始サイクルの共役類)

Artin-Ihara L関数

Γ : グラフ

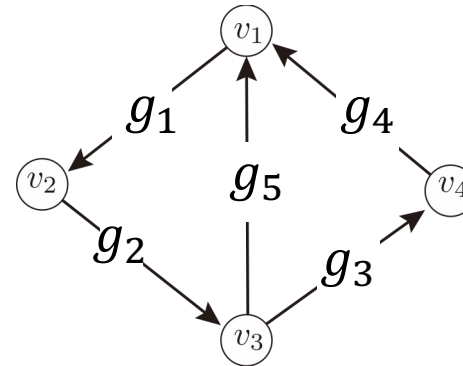
G : 群

g_e : 辺 e に乗せた G の元

R : 群 G の既約表現 (次元 d_R)

$\rho_R(g_e)$: g_e の表現行列

※ 通常は有限群だが、すぐに $U(N_c)$ にする



$$\text{cf) } \zeta_{\Gamma}(q) \equiv \prod_{[C] \in [PR]} (1 - q^{\ell(C)})^{-1}$$

$$L_{\Gamma}(q; G, R, \{g_e\}) \equiv \prod_{[C] \in [PR]} \det \left(I_{d_R} - \rho_R(g_C) q^{\ell(C)} \right)^{-1} \left(g_C \equiv \prod_{e \in C} g_e \right)$$

伊原ゼータ関数に群の表現行列の重みを付けたもの

伊原ゼータ関数の性質

$$\zeta_{\Gamma}(q) = \exp \left(- \sum_{[C]:\text{PR}} \log(1 - q^{\ell(C)}) \right) = \exp \left(\sum_{[C]:\text{PR}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{m\ell(C)}}{m} \right) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{n} q^n \right)$$

#(reduced cycle of length n)

伊原ゼータ関数は、グラフ上の既縮グラフをカウントする関数

同じことはL関数についても言える

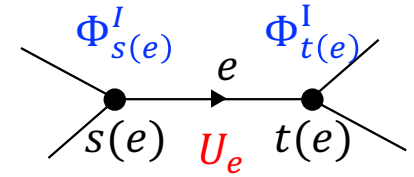
$$L_{\Gamma}(q; U(N_c), R, \{U_e\}) \equiv \prod_{C \in [\mathcal{P}_R]} \det(\mathbf{1}_{d_R} - q^{\ell(C)} \rho_R(U_C))^{-1} = \exp \left(\sum_{C \in [\Pi_+]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \left(\text{Tr}_R U_C^n + \text{Tr}_R U_C^{\dagger n} \right) \right)$$


 “chiral” primitive reduced cycles

Artin-Ihara L関数は、グラフ上の全てのWilson loopの和

拡張Kazakov-Migdal模型

$$S_R^\Gamma = \sum_{I=1}^{N_f} \sum_{v \in V} (1 + q^2(\deg v - 1)) \Phi_v^{I\dagger} \Phi_v^I - q \sum_{e \in E} \left(\Phi_{s(e)}^{I\dagger} \rho_R(U_e) \Phi_{t(e)}^I + \Phi_{t(e)}^{I\dagger} \rho_R(U_e^\dagger) \Phi_{s(e)}^I \right)$$



スカラー場のガウス積分を実行すると、分配関数がL関数のユニタリ一行列積分になる

Ohta-S.M. 2026

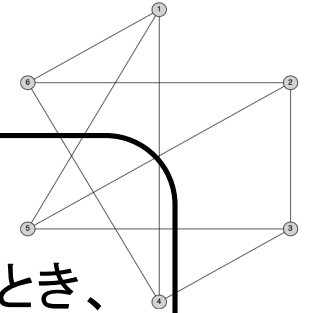
$$Z_R^\Gamma \equiv \int \prod_{v \in V} d\Phi_v \prod_{e \in E} dU_e e^{-S_R^\Gamma} = \int \prod_{e \in E} dU_e L_\Gamma(q; U(N_c), R, \{U_e\})^{N_f}$$

拡張KM模型は、R表現におけるグラフ上のWilson loopを全て足し上げたゲージ理論

R : 基本表現 $\Rightarrow$ **FKM模型** (latticeゲージ理論の拡張) Ohta-S.M. 2023

※ R : 随伴表現, Γ : (超)立方格子 $\Rightarrow$ オリジナルのKazakov-Migdal模型 Kazakov-Migdal 1992

拡張KM模型の双対性



Altin-Ihara L関数の関数等式（簡単のために $u = 0$ ）

グラフ Γ が $(t + 1)$ regular（全ての頂点から $t+1$ 本の辺が出ている）とき、

$$L_{\Gamma}(1/tq; G, R, \{U_e\}) = (tq^2)^{n_V N_c} \left(\frac{-tq^2(1 - q^2)}{1 - t^2q^2} \right)^{(n_E - n_V)N_c} L_{\Gamma}(q; G, R, \{U_e\})$$

q を $1/tq$ に取り替えても、本質的に L関数は同じ関数

$$Z_R^{\Gamma} = \int \prod_{e \in E} dU_e L_{\Gamma}(\textcolor{blue}{q}; U(N_c), R, \{U_e\})^{N_f}$$

$\swarrow$ coupling constant

Ohta-S.M. 2024, 2026

拡張KM模型は strong/weak coupling dualityを持つ

ヤング図から見た サイクルグラフ上のFKM模型

一般化したFKMモデルの指標展開

C_n 上のFKMモデルはユニタリ一行列モデル

$$S_{C_n}(U; q) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_f \alpha^m}{m} \text{Tr} (U^m + U^{-m})$$

少し一般化

$$S(U; \vec{\beta}) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m}{m} \text{Tr} (U^m + U^{-m})$$

指標による展開

$$e^{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m}{m} \text{Tr} U^m} = \sum_{R \in Y_{N_c}} s_R(x) \chi_R(U) \left(x \equiv (x_1, x_2, \dots), \beta_n \equiv p_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n \right)$$

ヤング図の模型への変換

Plancherelの公式

$f(U) : U(N_c)$ のclass function

$\chi_R(U) = \text{Tr } \rho_R(U) : U(N_c)$ の既約表現 R に対する指標

$$f(U) = \sum_{R \in Y_{N_c}} c_R \chi_R(U) \Rightarrow \int dU |f(U)|^2 = \sum_{R \in Y_{N_c}} |c_R|^2$$

今考えているユニタリ行列模型の双対

Dutta-Dutta 2016
Kimura-Zahabi 2021

$$Z = \int dU e^{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m}{m} \text{Tr}(U^m + U^{-m})} = \sum_{R \in Y_{N_c}} |s_R(x)|^2$$

サイクルグラフ上のFKM模型の場合

$$S_{C_n}(U; q) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m}{m} \text{Tr} (U^m + U^{-m}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_f \alpha^m}{m} \text{Tr} (U^m + U^{-m})$$

パラメータ

$$\beta_m = N_f \alpha^m = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^m \Rightarrow x = (\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{N_f}, 0, \dots)$$

シューア関数

$$s_R(\alpha, \dots, \alpha, 0, \dots) = (\dim_{N_f} R) \alpha^{|R|}$$

分配関数

$$Z_{\text{FKM}}^{C_n} = \sum_{R \in Y_{N_c}} (\dim_{N_f} R)^2 \alpha^{2|R|} = \sum_{\vec{\lambda} \in Y_{N_c}} \left(\prod_{1 \leq i < j \leq N_f} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i} \right)^2 \alpha^{2 \sum_i \lambda_i}$$

ユニタリ一行列模型として解ける

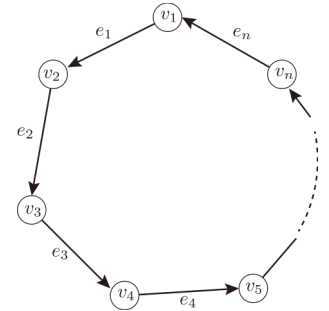
ゲージ固定した C_n 上のFKM模型

ゲージ固定: $U_2 = \dots = U_n = 1$ ($U_1 \equiv U, \alpha \equiv q^n$)

Ohta-S.M. 2023

$$Z_{C_n} = \int \prod_{i=1}^n dU_i L_{C_n}(q; U(N_c), \text{fund}, \{U_i\})^{N_f} = \mathcal{N} \int dU \frac{1}{|\det(1 - \alpha U)|^{2N_f}}$$

$$= \mathcal{N} \int dU e^{N_c \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma \alpha^m}{m} \text{Tr}(U^m + U^{-m})} = \mathcal{N} \int \prod_{i=1}^{N_c} d\theta_i e^{-S_{\text{eff}}[\theta]} \quad (N_f = \gamma N_c)$$



Uの固有値の有効作用

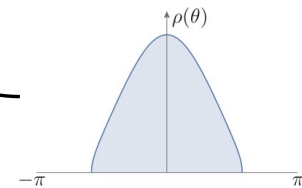
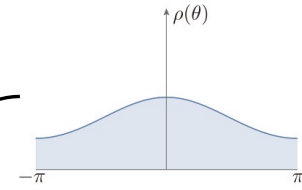
$$S_{\text{eff}}[\theta] = -\log \left| \sin \frac{\theta_j - \theta_k}{2} \right| + N_f \sum_i \log (1 - 2q^n \cos \theta_i + q^{2n})$$

large N_c での固有値分布の厳密解 $\left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} = \frac{(1-\alpha)^2}{4\alpha} \frac{2\gamma-1}{(\gamma-1)^2} \right)$

$$\rho(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left(1 + 2\gamma \frac{\alpha \cos \theta - \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2} \right), & (\alpha < \frac{1}{2\gamma-1}) \\ \frac{2(\gamma-1)\alpha}{\pi} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2} \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}, & (\alpha \geq \frac{1}{2\gamma-1}) \end{cases}$$

$$(\alpha < \frac{1}{2\gamma-1})$$

$$(\alpha \geq \frac{1}{2\gamma-1})$$



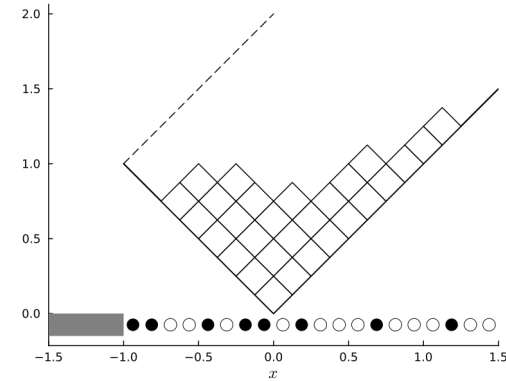
GWW
相転移
(3次)

ヤング図模型の方も厳密に解ける

単調減少列: $n_i \equiv \lambda_i - i + 1$

マヤ図形の黒丸の位置: $x_i \equiv \frac{1}{N_c} \left(n_i - \frac{1}{2} \right)$

黒丸の密度(マヤ密度): $\tilde{\rho}(x) \equiv \frac{1}{N_c} \sum_{i=1}^{N_c} \delta(x - x_i)$

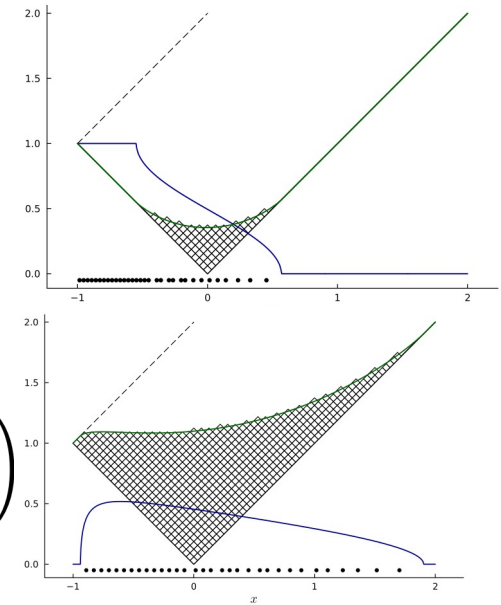


$\alpha < \alpha^*$

$$\tilde{\rho}(x) = \begin{cases} 1 & (-1 \leq x < \frac{-2\gamma\alpha}{1+\alpha}) \\ \frac{1}{\pi} \arccos \left(\frac{(\alpha + \alpha^{-1})x + 2\gamma\alpha}{2(x + \gamma)} \right) & (\frac{-2\gamma\alpha}{1+\alpha} \leq x \leq \frac{2\gamma\alpha}{1-\alpha}) \\ 0 & (x > \frac{2\gamma\alpha}{1-\alpha}) \end{cases}$$

$\alpha > \alpha^*$

$$\tilde{\rho}(x) = \frac{1}{\pi} \arccos \left(\frac{(2x + 2\gamma + 1)^2 \alpha + (2x + 1)^2 \alpha^{-1} - 2(2\gamma - 1)}{8(x + 1)(x + \gamma)} \right)$$

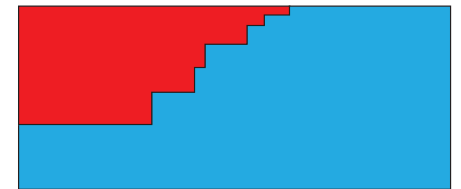


ヤング図から見た強／弱結合双対

$$\tilde{S}[\vec{n}, \alpha] = - \sum_{i \neq j} \log |n_i - n_j| - 2 \sum_i \log \frac{(n_i + N_f)!}{(n_i + N_c)!} - \log \alpha^2 \sum_i n_i$$

n_i の双対変数

$$\tilde{n}_i \equiv -N_f - N_c - n_{N_c-i} - 1$$



- $\log |n_i - n_j| = \log |\tilde{n}_{N_c-i} - \tilde{n}_{N_c-j}|$
- $\frac{(N_f + n_i)!}{(N_c + n_i)!} = (N_c + n_i + 1) \cdots (N_f + n_i) = (-1)^{N_f - N_c} \frac{(N_f + \tilde{n}_{N_c-i})!}{(N_c + \tilde{n}_{N_c-i})!}$
- $-\log \alpha^2 \sum_i n_i = -\log \alpha^{-2} \sum_i \tilde{n}_i + \text{const.}$

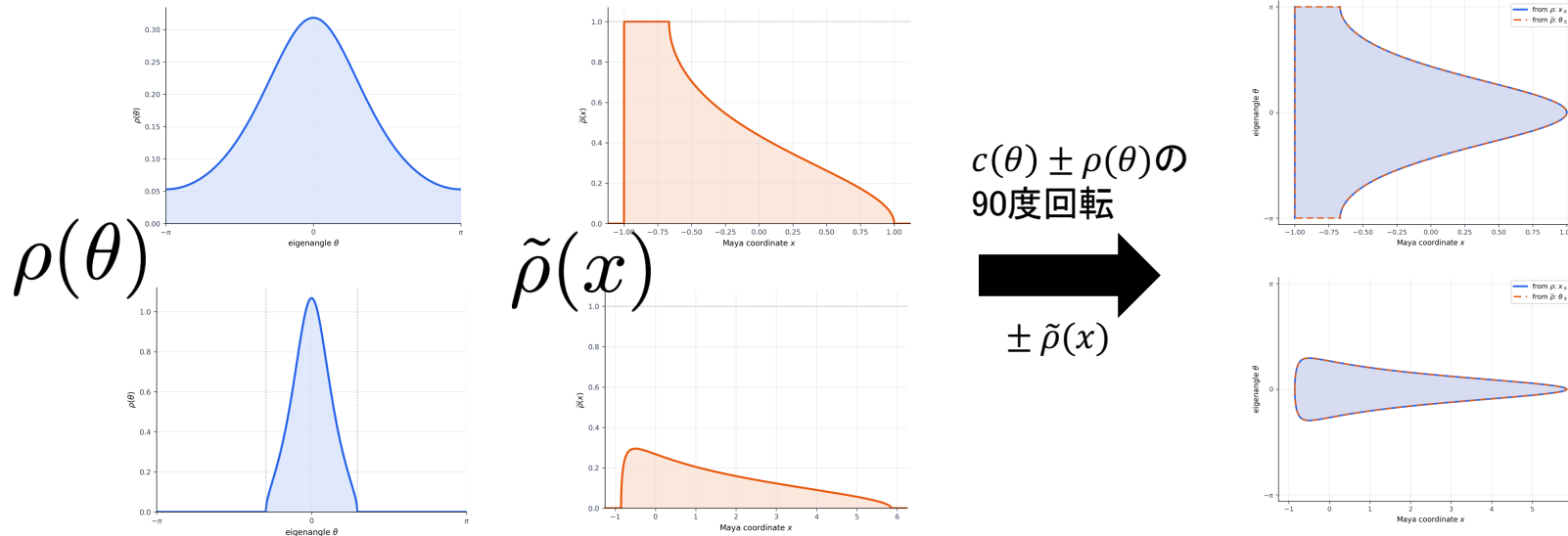
$$\tilde{S}[\vec{n}, \alpha] = \tilde{S}[\vec{\tilde{n}}, \alpha^{-1}]$$

固有値分布とマヤ分布

両方の相における固有値分布密度とマヤ図形密度

$$\rho(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left(1 + 2\gamma \frac{\alpha \cos \theta - \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2} \right), \\ \frac{2(\gamma - 1)\alpha}{\pi} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2} \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \end{cases} \quad \tilde{\rho}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \arccos \left(\frac{(\alpha + \alpha^{-1})x + 2\gamma\alpha}{2(x + \gamma)} \right) \\ \frac{1}{\pi} \arccos \left(\frac{(2x + 2\gamma + 1)^2 \alpha + (2x + 1)^2 \alpha^{-1} - 2(2\gamma - 1)}{8(x + 1)(x + \gamma)} \right) \end{cases}$$

これらの間には面白い関係がある $c(\theta) \equiv \frac{1}{2} + \gamma \frac{\alpha \cos \theta - \alpha - 2}{1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2}$



ピッタリ重なる

同じ現象はGWW模型でも観測されていた

液滴描像とスペクトル曲線

液滴描像

An observation Dutta-Dutta 2016

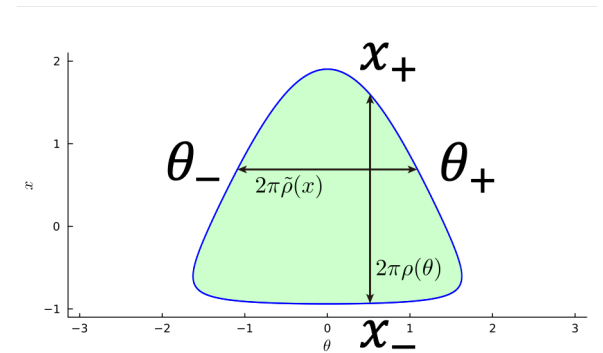
$$Z = \int dU e^{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m}{m} \text{Tr}(U^m + U^{-m})} = \sum_{R \in Y_{N_c}} |s_R(x)|^2$$

で定義される理論に関して、固有値密度とマヤ密度は、曲線

$$\left(x + \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cos k\theta \right)^2 = \pi^2 \rho(\theta)^2 : \text{境界方程式}$$

で囲まれる「液滴 (droplet)」によって、次のように与えられる

$$2\pi\rho(\theta) = x_+ - x_- \quad 2\pi\tilde{\rho}(x) = \theta_+ - \theta_-$$



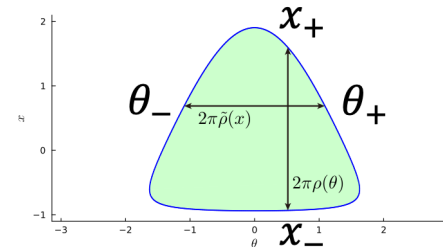
これを仮定して良いなら、密度の間の双対性は自明

液滴描像の下での密度とGWW相転移

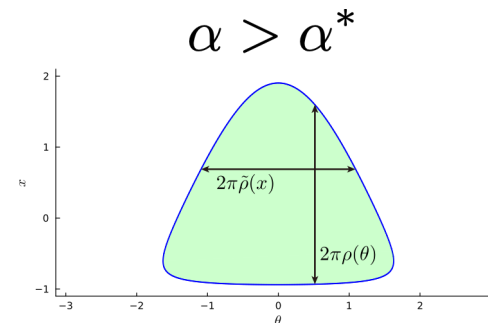
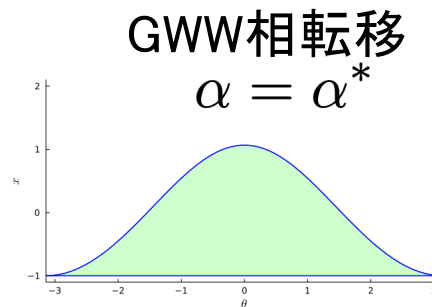
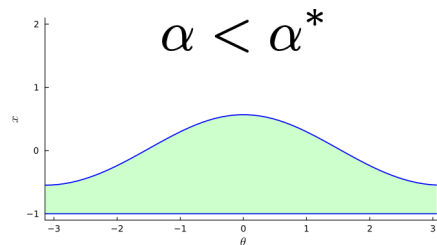
ふたつの密度は、同じ液滴の別の表示

$$x_{\pm}(\theta) = c(\theta) \pm \pi\rho(\theta) \quad \left(c(\theta) = -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cos k\theta \right)$$

$$\theta_{\pm}(x) = \pm\pi\tilde{\rho}(x)$$



FKM模型における液滴



GWW相転移は、液滴が境界から離れる転移

- ただし、その導出には不必要な仮定(不要な関数の挿入と液滴描像の先験的な仮定)が介在している
- 以下、液滴描像が量子スペクトル曲線の古典極限として得られることを示す

有限 N_c での分配関数の書き換え

$$Z = \int dU e^{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m}{m} \text{Tr}(U^m + U^{-m})} = \sum_{\vec{h}} \left| \Xi_R(\vec{h}; \vec{\beta}) \right|^2$$

$(h_i \equiv \lambda_i - i + N_c = n_i + N_c)$

$$\Xi_R(\vec{h}; \vec{\beta}) \equiv \sum_{m_1, m_2, \dots = 0}^{\infty} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k!} \left(\frac{N_c \beta_k}{k} \right)^{m_k} \chi_R(\mathcal{C}_{\vec{m}})$$

$$\chi_R(\mathcal{C}_{\vec{m}}) = \prod_{i=1}^{N_c} \oint \frac{dz_i}{2\pi i z_i^{h_i+1}} \left(\prod_{i < j}^{N_c} (z_i - z_j) \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{N_c} z_i^k \right)^{m_k} \right)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{i=1}^{N_c} \frac{d\theta_i}{2\pi} \exp \left(\underbrace{N_c \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k} e^{ik\theta_i} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=1}^{N_c} \log \left| 2 \sin \frac{\theta_i - \theta_j}{2} \right|}_{\text{フーリエ変換}} - i \sum_{i=1}^{N_c} \left(h_i - \frac{N_c - 1}{2} \right) \theta_i \right)$$

Plancherel公式

$$Z = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{i=1}^{N_c} \frac{d\theta_i}{2\pi} |\tilde{\Xi}(\vec{\theta}; \vec{\beta})|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{i=1}^{N_c} \frac{d\theta_i}{2\pi} \exp \left(\underbrace{2N_c \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k} \cos k\theta_i + \sum_{i \neq j=1}^{N_c} \log \left| 2 \sin \frac{\theta_i - \theta_j}{2} \right|}_{\text{元に戻った}} \right)$$

$$= \int dU e^{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m}{m} (\text{Tr } U^m + \text{Tr } U^{-m})}$$

- e^{θ_i} は U の固有値
- θ_i は h_i の Fourier dual

Schwinger-Dyson方程式

$$\Xi_R(\vec{h}; \vec{\beta}) = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{i=1}^{N_c} \frac{d\theta_i}{2\pi} \exp \left(N_c \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k} e^{ik\theta_i} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=1}^{N_c} \log \left| 2 \sin \frac{\theta_i - \theta_j}{2} \right| - i \sum_{i=1}^{N_c} \left(h_i - \frac{N_c - 1}{2} \right) \theta_i \right)$$

↓ 恒等式

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{j=1}^{N_c} \frac{d\theta_j}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \exp \left(N_c \sum_{j=1}^{N_c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k} e^{ik\theta_j} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq k=1}^{N_c} \log \left| 2 \sin \frac{\theta_j - \theta_k}{2} \right| - i \sum_{j=1}^{N_c} \left(h_j - \frac{N_c - 1}{2} \right) \theta_j \right) \\ &\equiv N_c \left\langle i \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{ik\theta_i} + \frac{1}{2N_c} \sum_{j \neq i} \cot \frac{\theta_i - \theta_j}{2} - i \left(\frac{h_i}{N_c} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2N_c} \right) \right\rangle \end{aligned}$$

固有値密度を導入 $\rho(\theta) = \frac{1}{N_c} \sum_i \delta(\theta - \theta_i)$ 積分経路から θ_i を外す

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle i \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{ik\theta_i} + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \rho(\theta) \cot \frac{\theta_i - \theta \pm i\epsilon}{2} - i \left(\frac{h_i}{N_c} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2N_c} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle i \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{ik\theta_i} + \frac{1}{2} \oint_{-\pi}^{\pi} d\theta \rho(\theta) \cot \frac{\theta_i - \theta}{2} \pm \pi i \rho(\theta_i) - i \left(\frac{h_i}{N_c} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2N_c} \right) \right\rangle \\ &\quad \text{主値積分に変更} \end{aligned}$$

スペクトル曲線

【recall】 θ_i と h_i は互いに *Fourier dual* の関係にある

これらはプランク定数を $1/N_c$ とする量子力学の正準変数の期待値とみなして良い:

$$[\hat{x}_i, \hat{\theta}_i] = \frac{i}{N_c} \delta_{ij} \quad \left(x_i \equiv \frac{h_i}{N_c} \right) \quad \hat{x}_i \equiv -\frac{i}{N_c} \frac{\partial}{\partial \theta_i}$$

演算子形式で見た方程式 cf) Kimura-Zahabi 2021

$$\text{実部: } \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' \rho(\theta') \cot \frac{\hat{\theta} - \theta'}{2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin k\hat{\theta} \quad \text{固有値分布の鞍点方程式}$$

$$\text{虚部: } -\hat{x}_i - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cos k\hat{\theta}_i \pm \pi \rho(\hat{\theta}_i) = 0 \quad \text{位相空間上の量子スペクトル曲線}$$

特に、積分経路の不定性から必然的に符号の不定性が生じる

古典極限と液滴描像

量子スペクトル曲線の古典極限（鞍点方程式を解いたあと）

$$\left(x + \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cos k\theta \right)^2 = \pi^2 \rho(\theta)^2 \quad \text{境界方程式を再現}$$

【recall】 x_i はマヤ図形の黒丸（フェルミオン）の位置

- 境界方程式は、定常状態における N_c 個のフェルミオンが従う方程式
- フェルミオンは1個あたり、位相空間の $2\pi\hbar = 2\pi/N_c$ の面積を占める
- 境界方程式に囲まれた部分の面積は、ちょうど 2π

境界方程式は、フェルミオンが占有する領域を表す ➡ 液滴描像

オリジナルKM模型の 1次相転移について(進行中)

オリジナルのKM模型の復習

$$S_{\text{KM}}^\Gamma = \sum_{v \in V} m_v^2 \text{Tr} \Phi_v^2 - q \sum_{e \in E} \text{Tr}(\Phi_{s(e)} U_e \Phi_{t(e)} U_e^\dagger)$$

- スカラー場はエルミート行列
- flavorは入っていない
- スカラー場を積分すると、ウィルソンループ(の絶対値)の和になる
- HCIZ積分でU積分が厳密に実行できる
- extraなU(1)ゲージ対称性を持つ
- 歴史的には、この対称性のためにQCDの模型としては破綻した
- かつての願望: 1次相転移が起きて、この対称性が壊れている相が実現されたらよいのに...
- 期待: フレーバーを入れたFKM模型ではGWW相転移が起きたのだから、
オリジナルのKM模型にもフレーバー入れたら相転移が起きるんじゃないの？

サイクルグラフ上のflavor入りKM模型

伊原ゼータ関数になるように質量を調整

※ $\alpha < 1$ でなければ級数が定義出来ない

$$Z_{\text{KM}} = \int \prod_{i=1}^L \prod_{I=1}^{N_f} d\Phi_i^I \prod_{i=1}^L dU_i \exp \left[- \sum_{i=1}^L \sum_{I=1}^{N_f} \text{Tr} \left((1 + q^2) (\Phi_i^I)^2 - q \Phi_i^I U_i \Phi_{i+1}^I U_i^\dagger \right) \right] = \mathcal{N} \int dU \exp \left[N_f \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k} |\text{Tr } U^k|^2 \right] \quad (\alpha \equiv q^L)$$

※ Aharony–Marsano–Minwalla–Papadodimas–Raamsdonk で議論された模型と同じ構造

effective action : $S = - \sum_{i < j} \log \left(4 \sin^2 \frac{\theta_i - \theta_j}{2} \right) - N_f \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k} |\text{Tr } U^k|^2$

$$= N_c^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (1 - N_f \alpha^k) |\text{Tr } U^k|^2 + \text{const.}$$

$$= N_c^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (1 - N_f \alpha^k) \underbrace{\left| \int d\theta \rho(\theta) e^{ik\theta} \right|^2}_{\equiv \rho_k}$$

$|\text{Tr } U^k|^2 = N_c + \sum_{i < j} 2 \cos(k(\theta_i - \theta_j))$
 $-\log \left(4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos(k\theta)$
 $\rho(\theta) \equiv \frac{1}{N_c} \sum_{i=1}^{N_c} \delta(\theta - \theta_i)$

- $\alpha < 1/N_f$ では、全てのmomentの係数が正
- このときは、 $\rho_k = 0$ 、すなわち、 $\rho(\theta) = 1/2\pi$ (一様分布) が解
- $\alpha = 1/N_f$ になると何が起こる？

1次相転移

相転移点直上

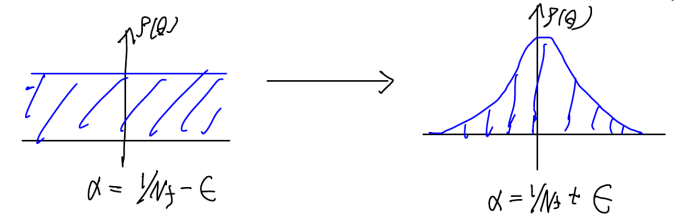
$$S_{\text{eff}}(\alpha = 1/N_f) = N_c^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left(1 - N_f^{1-k}\right) |\rho_k|^2 : \rho_1 \text{ が flat direction}$$

- 鞍点は、 $\rho_k = 0$ ($k = 2, 3, \dots$)

$$\rho(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\rho_k e^{-ik\theta} + \rho_k^* e^{ik\theta}) \right] \underset{\rho_1 = r e^{i\theta_0}}{=} \frac{1}{2\pi} [1 + 2r \cos(\theta - \theta_0)] \quad (0 \leq r \leq 1/2)$$

- 転移点近傍での自由エネルギー

$$\frac{S_{\text{eff}}}{N_c^2} = (1 - N_f \alpha) r^2 \underset{\alpha = 1/N_f + \epsilon}{=} -N_f \epsilon r^2 \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \epsilon < 0 &\Rightarrow r = 0 \\ \epsilon > 0 &\Rightarrow r = 1/2 \end{aligned}$$



$$F(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha < \frac{1}{N_f}, \\ -\frac{N_f}{4} \left(\alpha - \frac{1}{N_f} \right) + O\left(\left(\alpha - \frac{1}{N_f} \right)^2 \right), & \alpha > \frac{1}{N_f}. \end{cases} : 1\text{次相転移！}$$

$N_f = 1$ ではこの相転移は起こらない

まとめと展望

まとめ

- 分配関数がグラフL関数 (Wilson loopの総和) で与えられる拡張KMモデルを導入
- 正則グラフ上の拡張KMモデルは、強弱結合双対性を持つ
- サイクルグラフ上のFKMモデルはGWW相転移を起こす (実はグラフの種類に依らない)
- サイクルグラフ上のFKMモデルを、ヤング図モデルの立場から解いた
- 液滴描像を厳密に導出した
- サイクルグラフ上のフレーバーを入れたKMモデルは1次相転移を起こす

展望

- サイクルグラフ上のKMモデルは多分厳密に解ける
- フレーバー入りのKMモデルには先行研究がある。その再考察。
- グリッドグラフ(格子)と連続極限 グラフの次元？
- ユニタリ行列を乗せたL関数のpoleの構造と相転移の関係
- どのくらい弦理論なのか？
- クォークを乗せたFKMモデル (QCDに向けて) cf) Ohta-S.M 2025