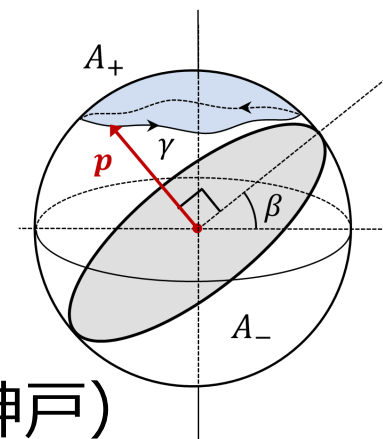


A Geometric Theory of Rigid Body Rotation - We All Live in the Hopf Fibration -

松本拓也（福井大学）

離散的手法による場と時空のダイナミクス2026



2026年9月7日（月），理化学研究所 計算科学研究センター（神戸）

Based on:

- [arXiv:2505.16749\[FORMA 41 \(2026\), 13–30.\]](#)
[M, 高田宗樹（福井大），保倉理美（福井大）]
- [arXiv:2512.04481 \[M\]](#)
- And work in progress...[M]

今日のお話：

- ①おもちゃ模型「**回転する円盤の回転角**」を定義します
- ②その「**回転角**」は**幾何学的位相**と解釈できます
- ③数学的には「**ホップ束のホロノミー**」です
- ④関連する現象として「**Dirac's monopole potential**」,
「**フーコーの振り子**」, 「**Berry位相**」などがあります
- ⑤一般の**剛体回転理論**へ拡張する試みを紹介します

目次

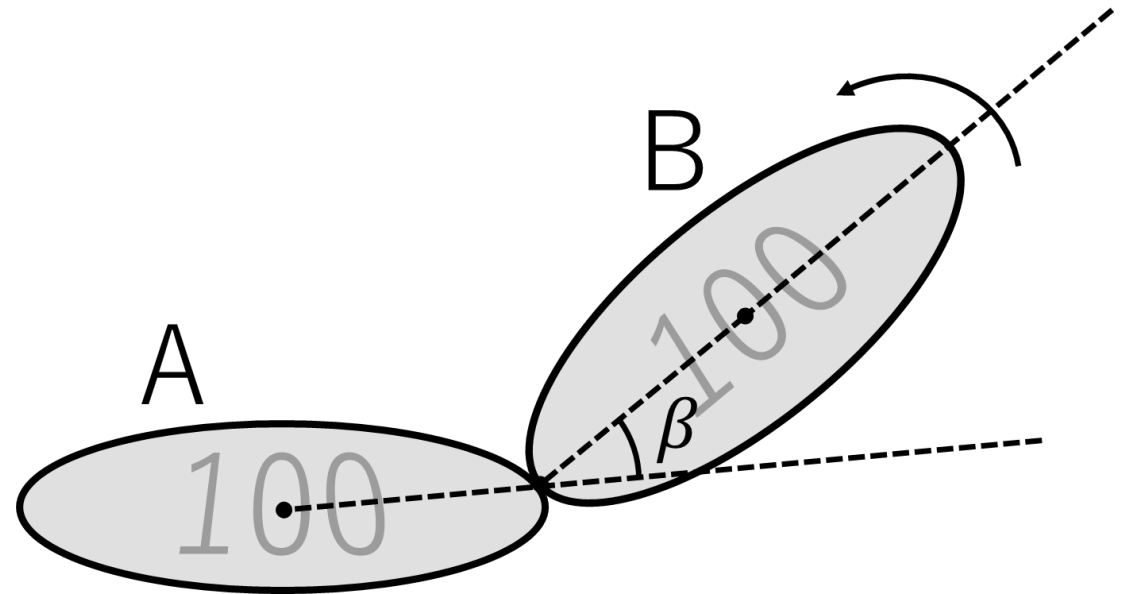
- ① 「回転円盤」 模型の定義
- ② 問題の一般化と幾何学的位相
- ③ ホップ束としての数学的定式化
- ④ 関連する物理現象
- ⑤ 剛体回転の幾何学的理論へ向けて

① 模型の定義 「回転する円盤の回転角」

半径がそれぞれ a, b であるような2つの円板A,Bがある。円板Aを水平面に固定し、円板Bは水平面と角度 β をなすように接触させる。

角度 β を一定に保ったまま、円板Bが円板Aのまわりを滑ることなく回転し、元の位置に戻ってきたとする。

このとき、円板Bは「100」の面から見て、何度回転しているだろうか？



2022年度日本数学コンクール問題2 「回転角の問題」
福井グループ [M,高田, 保倉]

「奇怪？千万 解決の巻」 p.29-p.30 (馬北国夫),

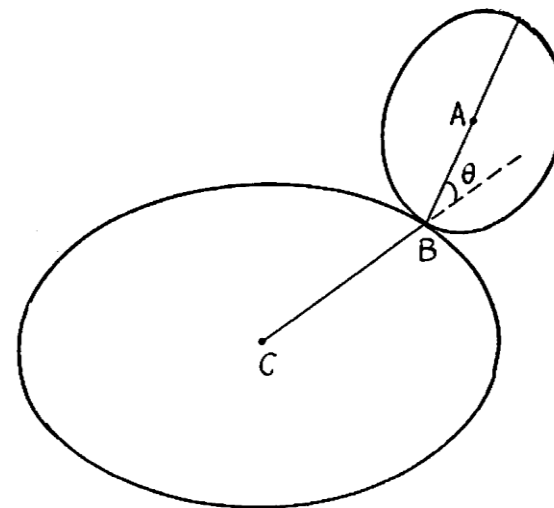
「趣味の数学 2月号」, 1959 (昭和34 年)

Vol.9, No.2, 独学者の数学会、新紀元社.

奇怪？千万 解決の巻

馬 北 国 夫

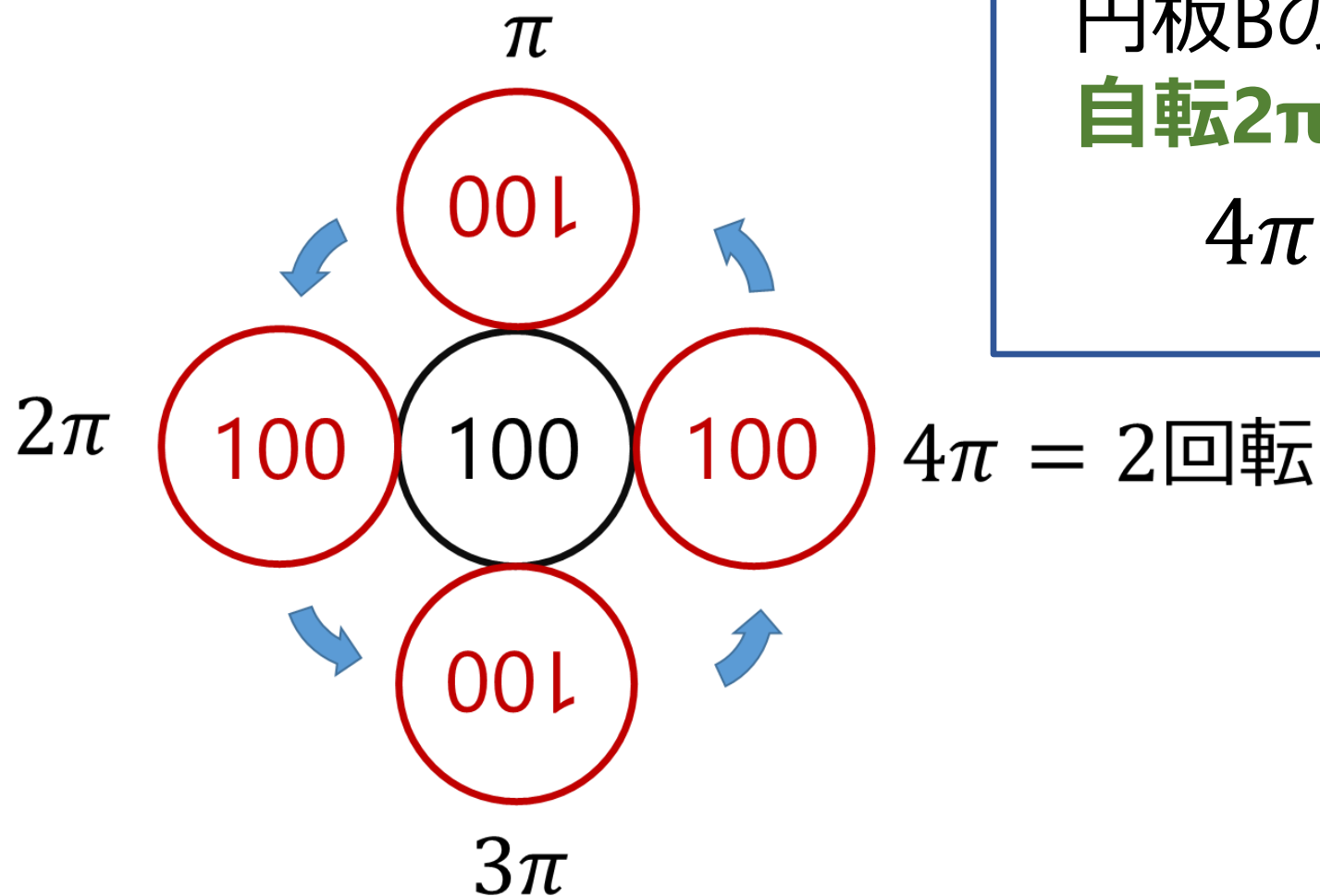
これは、おそらく、博士級の大先生でないですと、御存知ない問題です。いやそんな偉い先生程、外に御用がおありで、こんなことなんかに係わっている暇はないでしょうから、その「御用」の中に、この問題が現れれば即座に解決してしまう能力はお持ちでも、多分こんな問題はあまり見かけないので、御存知ではないかも知れません。次のような問題で、これが先月からの宿題になっていました。



◎1つの大円Cの周に沿って、1つの小円Aが、絶えず同じ方向に、すべることなく転がるとき、上図のように、Aの平面はCの平面に対して θ 【 $\neq 0, \pi/2, \pi$ 】の角を保つものとすれば、AがCを1周するとき、A自身は何回転するか？

一体、どのように考え、どのように解けばよいのでしょうか。そして問題はこれを分りよく解説する方法を見付けることにあるのです。説明は出来ても、素人分りがしない説明は落第ということにします。

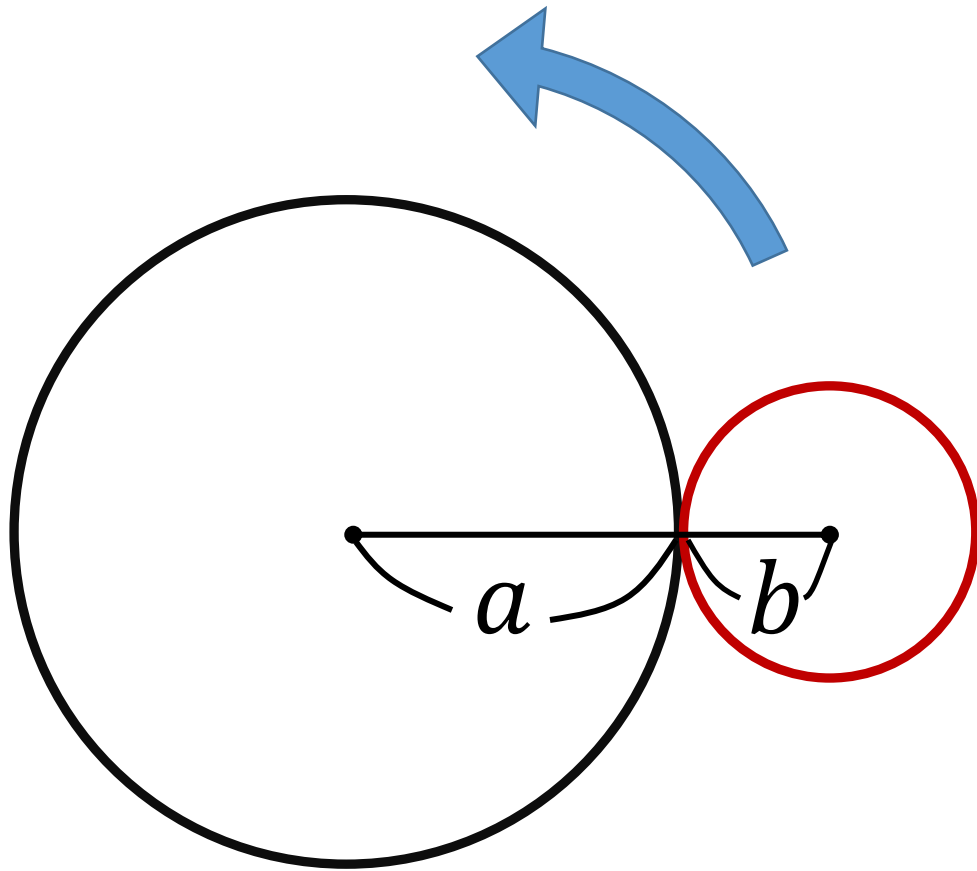
実験 ($\beta = 0, a = b$)



円板Bの回転角は、
自転 2π と公転 2π から成る。

$$4\pi = 2\pi + 2\pi$$

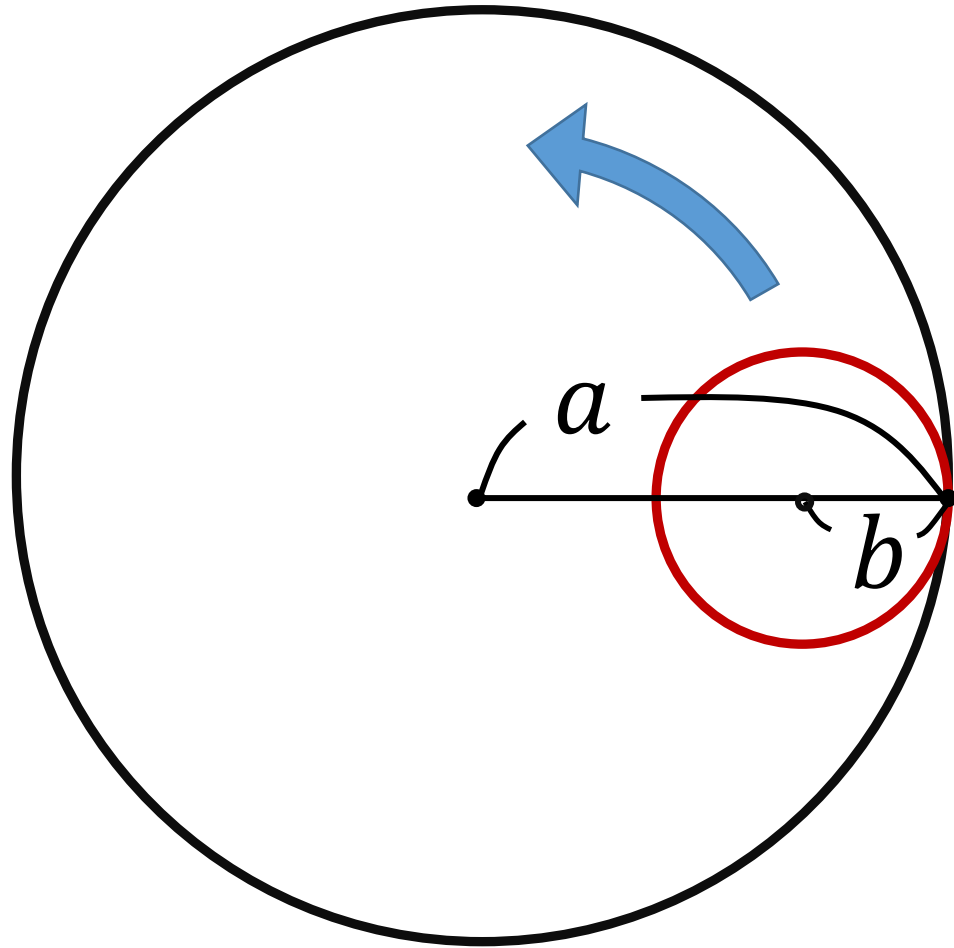
実験 ($\beta = 0, a \neq b$)



円板Bの回転角は、
自転と**公転 2π** から成る。

$$\frac{2\pi a}{b} + 2\pi$$

実験 ($\beta = \pi, a \neq b$)



円板Bの回転角（下から見る！）は、
自転と**公転** $- 2\pi$ から成る。

$$\frac{2\pi a}{b} - 2\pi$$

最初の気づき

円板Bの回転角 Δ は、**自転角** Δ_d と**公転角** Δ_g から成る。

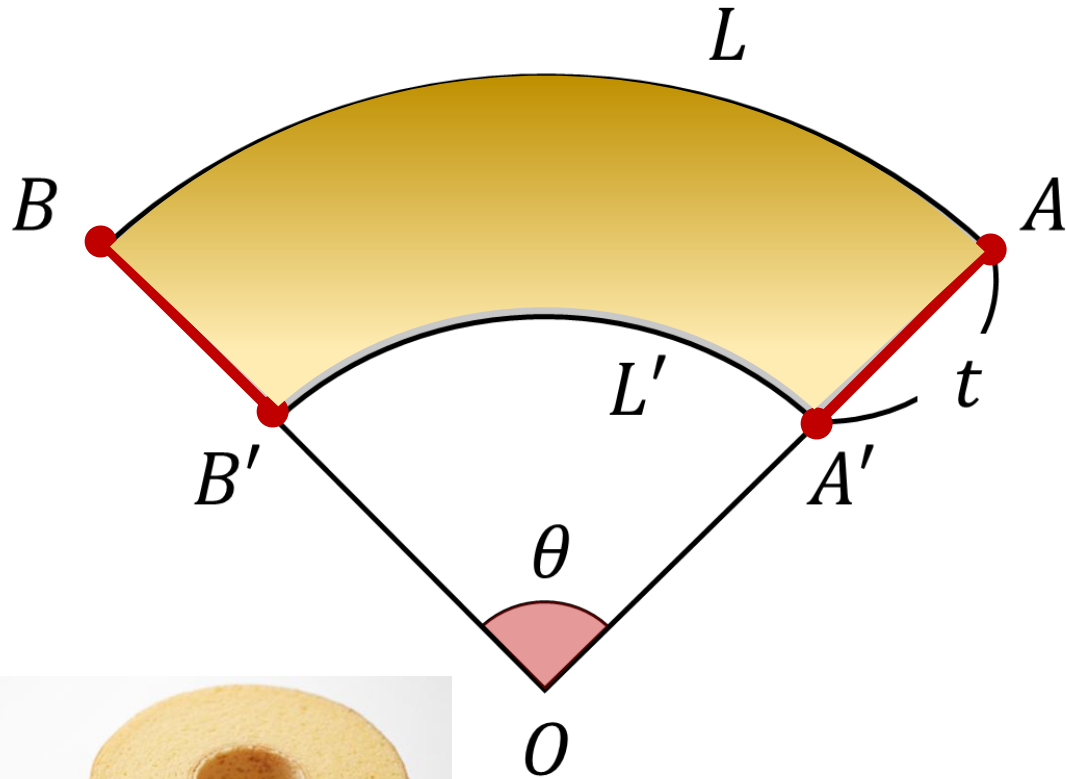
$$\Delta = \Delta_d + \Delta_g = \frac{2\pi a}{b} + \Delta_g$$

- $\Delta_d = \frac{\text{円板の転がった距離}}{\text{円板の半径}}$ (**自転角, 動的位相**)
- $\Delta_g =$ **円板B自身が円板Aの回りを回ることによる回転** (**公転角, 幾何学的位相**)

この非自明な「公転角」を、
いかに数学的に記述するか？

「バームクーヘンの補題」

[M-Takada-Yasukura, arXiv:2505.16749]



たね CLUB HAPPE

公転角 Δ_g は「バームクーヘンの補題」で、
捉えられる。

線分 AA' と線分 BB' の成す角 θ は

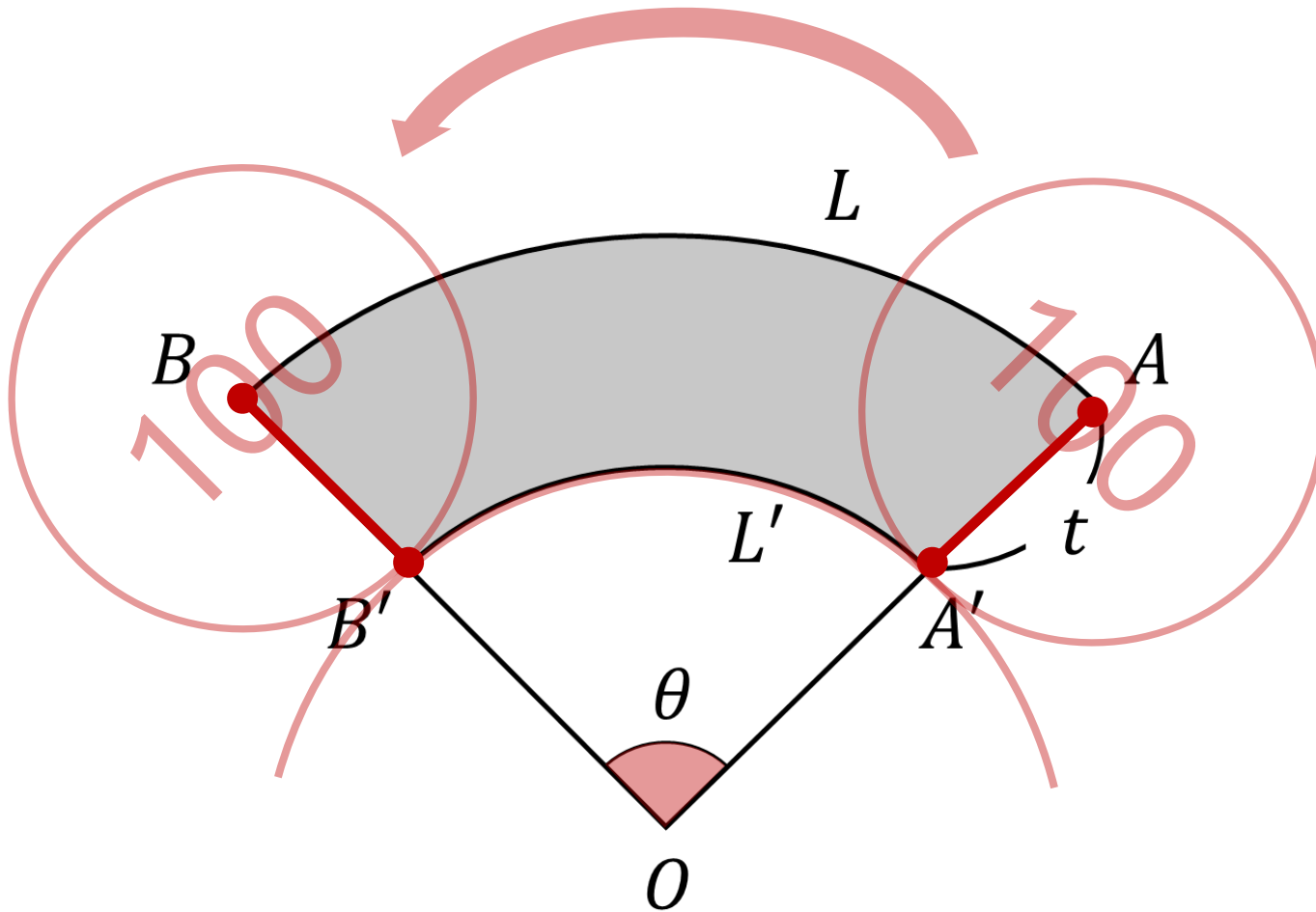
$$\theta = \frac{L - L'}{t}$$

(証明)

$$\frac{L - L'}{t} = \frac{\theta \times OA - \theta \times OA'}{t} = \frac{\theta t}{t} = \theta.$$

「バームクーヘンの補題」

[M-Takada-Yasukura, arXiv:2505.16749]



バームクーヘン角 $\theta = \frac{L-L'}{t}$
は、円板Bと円板Aが
一体となって回った時の
円板Bの回転角を表わす。

L = 円板Bの中心の移動距離
 L' = 円板AとBの接点の移動距離
 $t = b$ (円板Bの半径)

$$\beta = 0$$

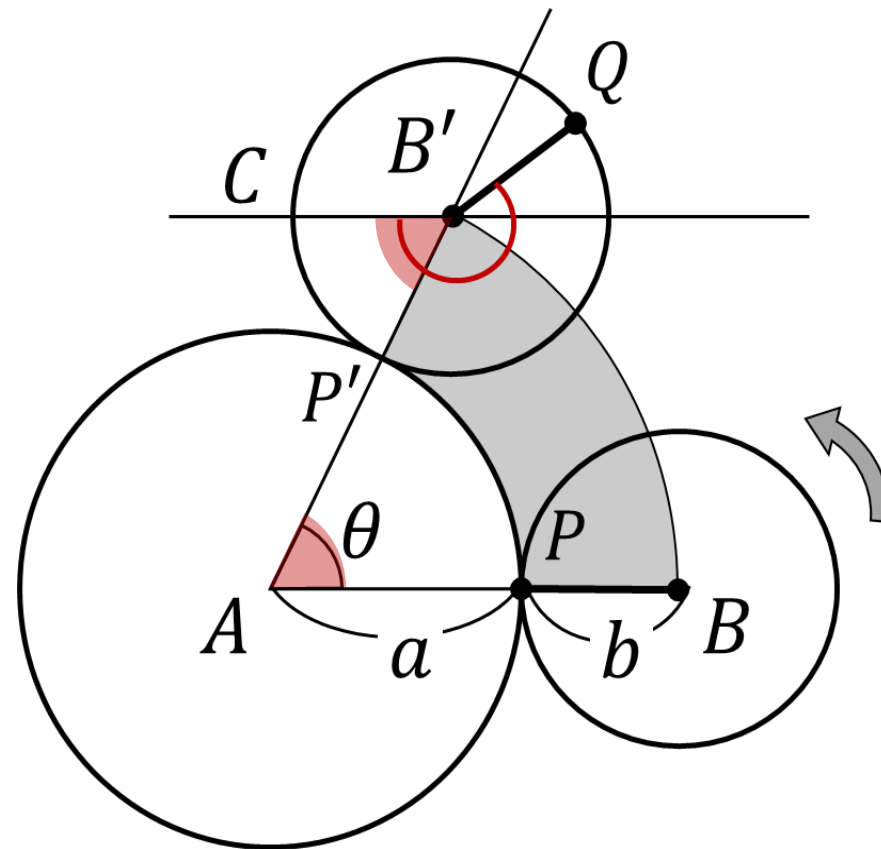
円板Bの回転角 Δ は

$$\Delta = \frac{2\pi a}{b} + 2\pi$$

バームクーヘンの角は

$$\frac{(a+b)\theta - a\theta}{b} = \theta$$

$\theta = 2\pi$ の時は、 $\Delta_g = 2\pi$ となる。



上から見た様子

$$0 < \beta < \pi/2$$

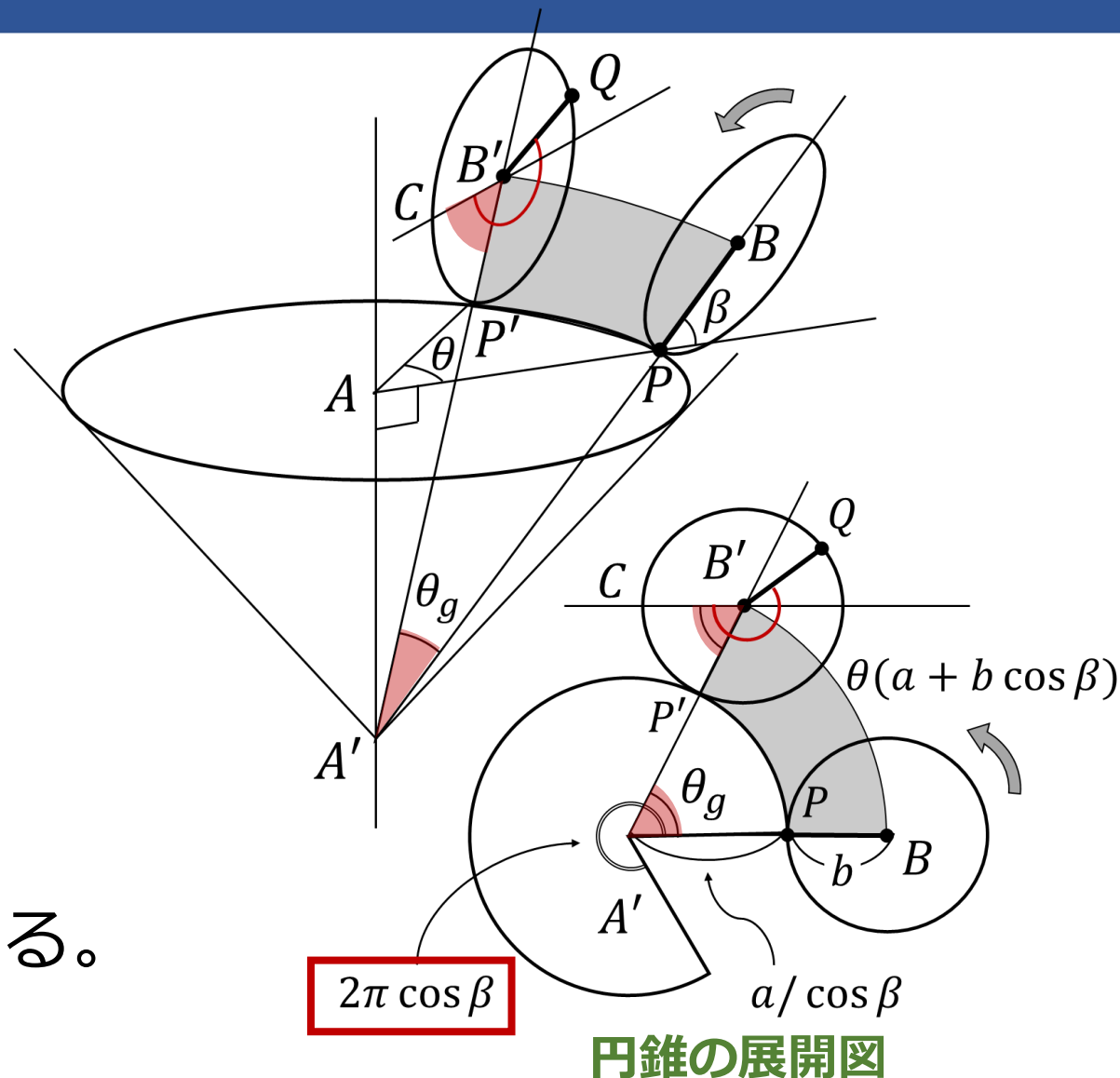
円板Bの回転角 Δ は

$$\Delta = \frac{2\pi a}{b} + 2\pi \cos \beta$$

バームクーヘンの角は

$$\frac{(a + b \cos \beta)\theta - a\theta}{b} = \theta \cos \beta$$

$\theta = 2\pi$ の時は、 $\Delta_g = 2\pi \cos \beta$ となる。



$$\beta = \pi/2$$

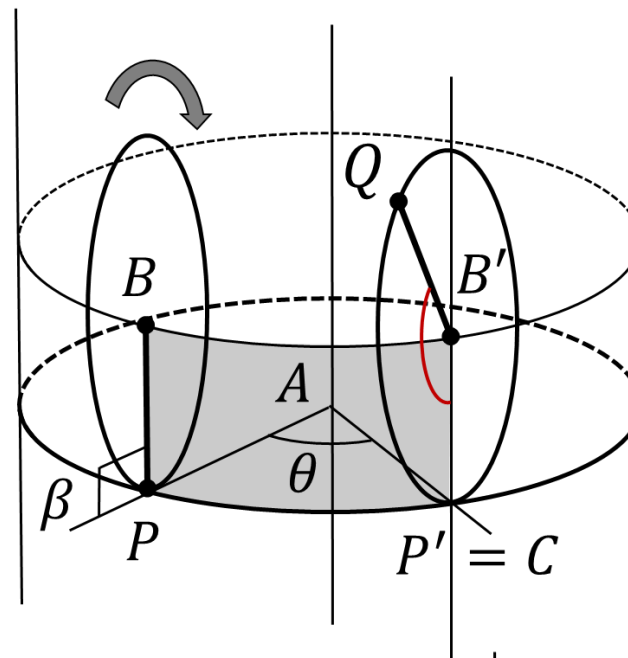
円板Bの回転角 Δ は

$$\Delta = \frac{2\pi a}{b} + 0$$

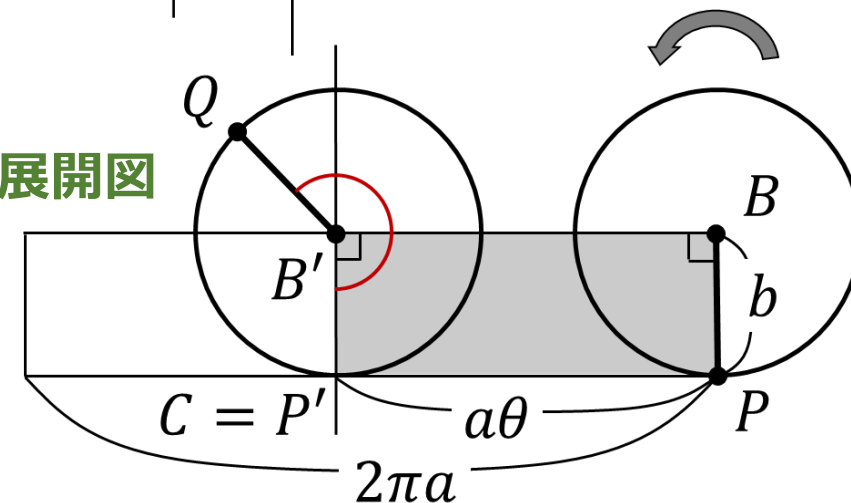
バームクーヘンの角は

$$\frac{a\theta - a\theta}{b} = 0$$

$\theta = 2\pi$ の時は、 $\Delta_g = 0$ となる。



円柱の展開図



$$\pi/2 < \beta < \pi$$

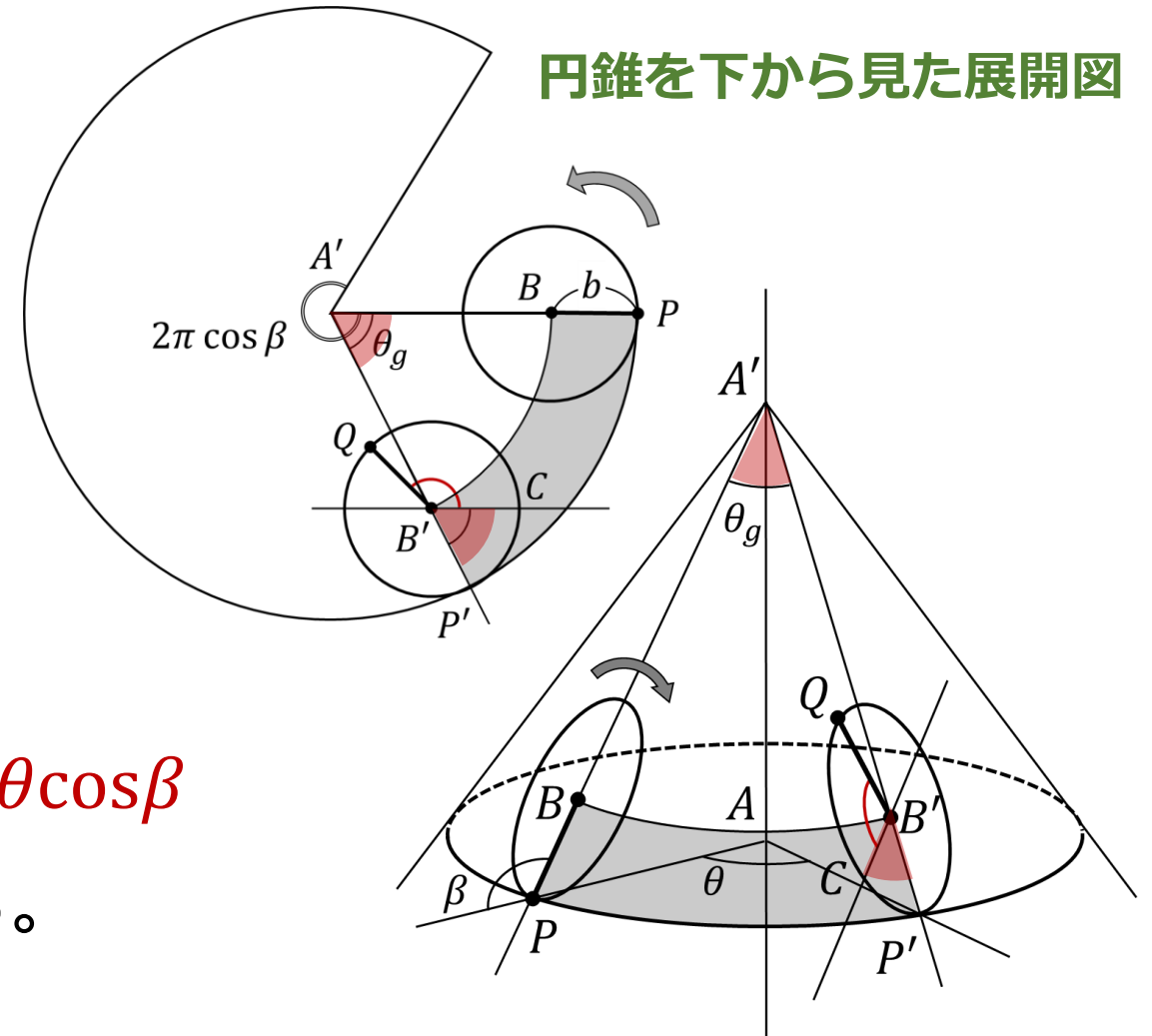
円板Bの回転角 Δ は

$$\Delta = \frac{2\pi a}{b} + 2\pi \cos \beta$$

バームクーヘンの角は

$$\frac{(a - b \cos(\pi - \beta))\theta - a\theta}{b} = \theta \cos \beta$$

$\theta = 2\pi$ の時は、 $\Delta_g = 2\pi \cos \beta$ となる。



$$\beta = \pi$$

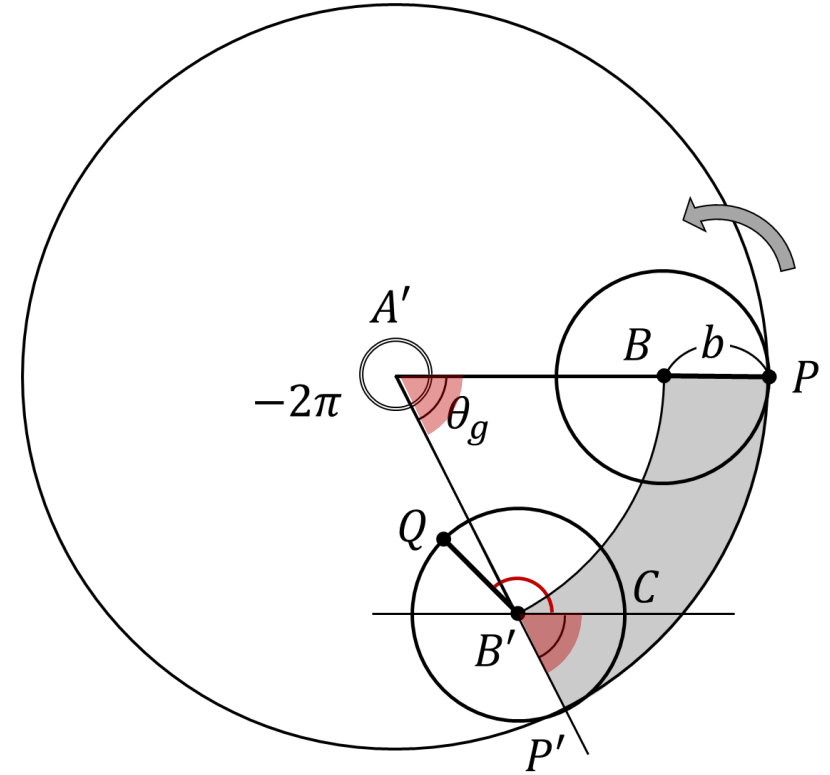
円板Bの回転角 Δ は

$$\Delta = \frac{2\pi a}{b} - 2\pi$$

バームクーヘンの角は

$$\frac{(a-b)\theta - a\theta}{b} = -\theta$$

$\theta = 2\pi$ の時は、 $\Delta_g = -2\pi$ となる。

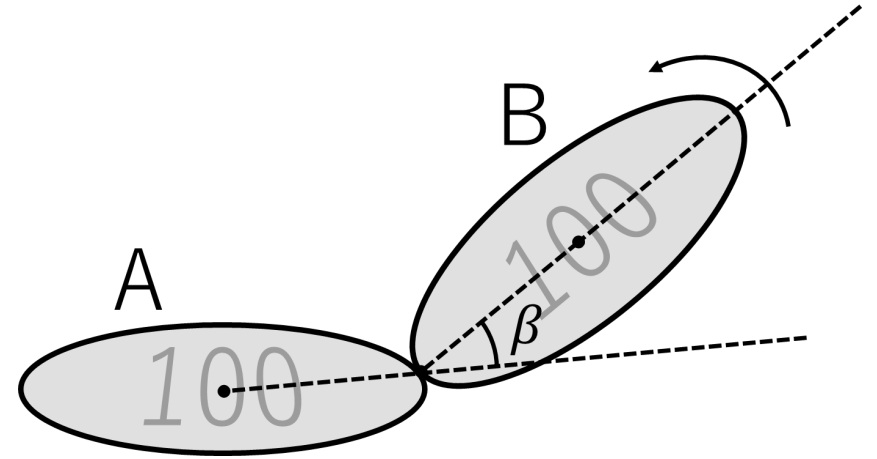


下から見た様子

【解答】 任意の $0 \leq \beta \leq \pi$ で

円板Bの回転角 Δ は

$$\Delta = \frac{2\pi a}{b} + 2\pi \cos \beta$$

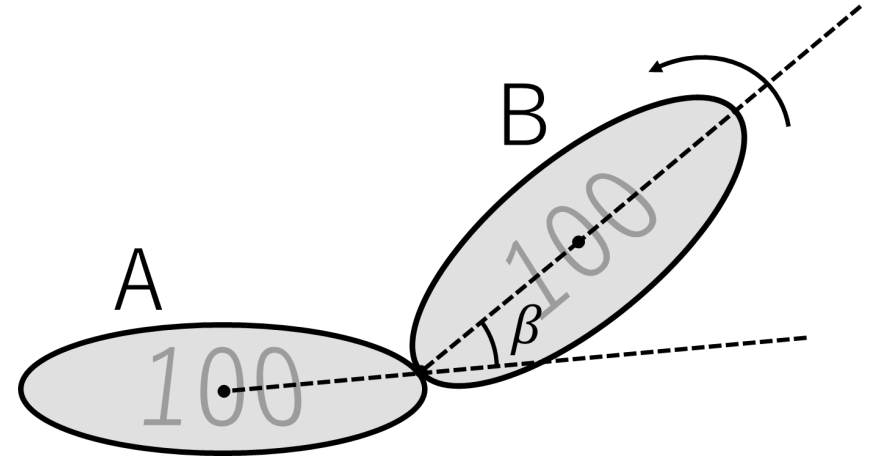


【解答】 任意の $0 \leq \beta \leq \pi$ で

円板Bの回転角 Δ は

$$\Delta = \frac{2\pi a}{b} + 2\pi \cos \beta$$

この意味は？



目次

- ① 「回転円盤」 模型の定義
- ② 問題の一般化と幾何学的位相
- ③ ホップ束としての数学的定式化
- ④ 関連する物理現象
- ⑤ 剛体回転の幾何学的理論へ向けて

一般化： $\beta = \beta(\theta)$ が一定でない場合

円板Bの回転角 Δ は

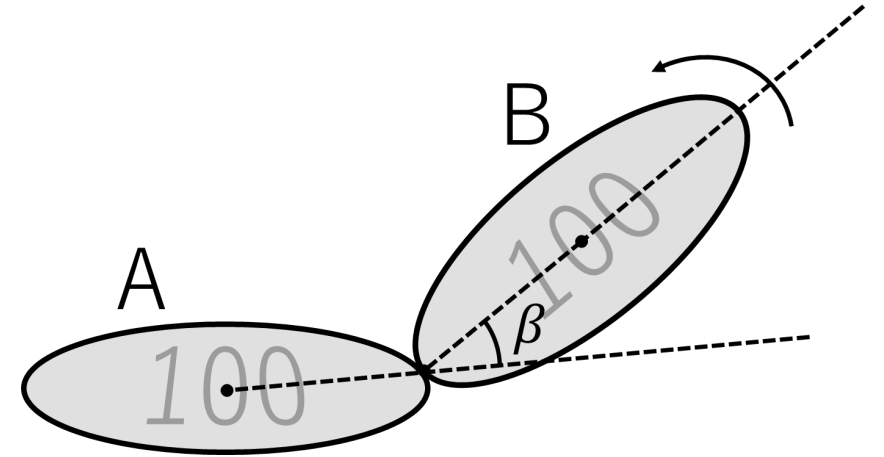
$$\Delta = \frac{2\pi a}{b} + 2\pi \cos \beta$$

【一般化】



β が一定でない場合 ($\beta = \beta(\theta)$)

公転角 Δ_g はどうなるか？

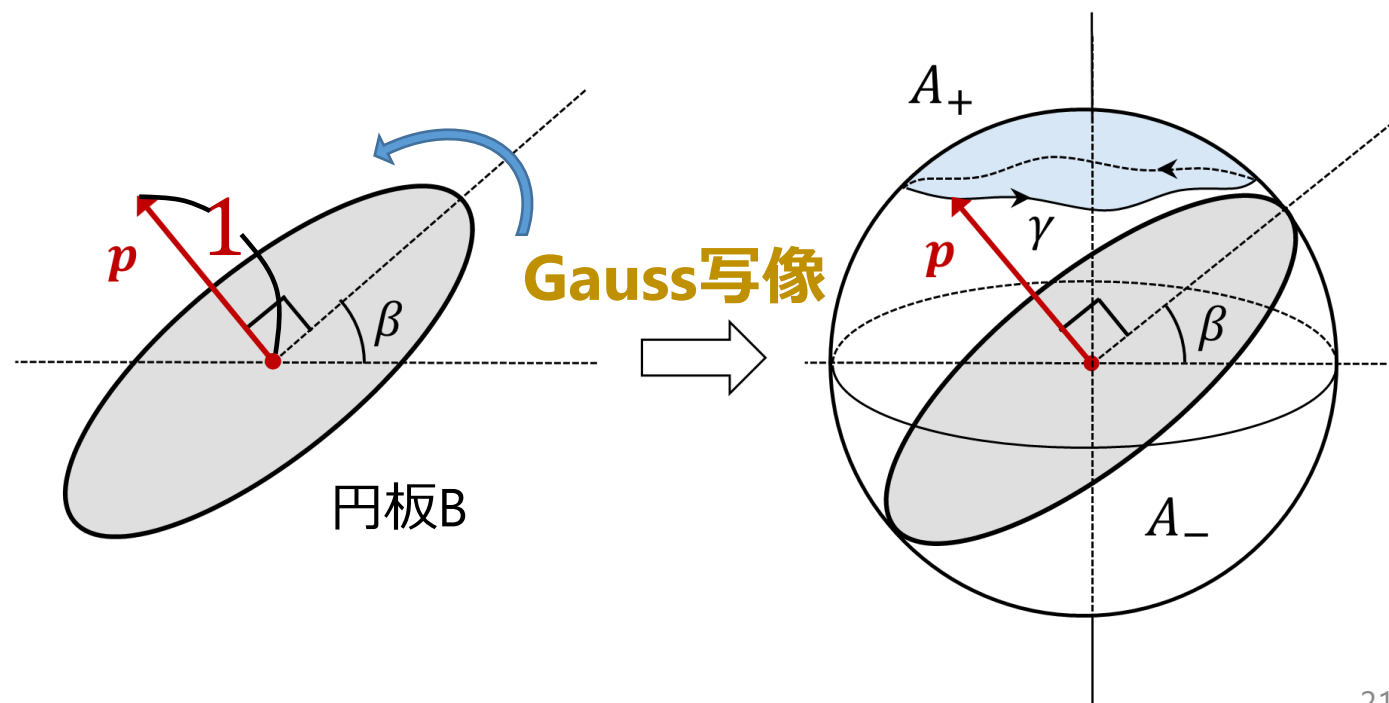


ガウス写像

- 円板Bに固定された単位法線ベクトル $p(t) \in S^2$ を取る。（この写像を **ガウス写像** と呼ぶ。）
- 円板の向きの変化を、球面上の曲線（**ガウス曲線**）として表す。 $\gamma = p([0, 1]) \subset S^2$

円板の姿勢の変化を、球面上の点の軌跡（ガウス曲線）として捉える

- Cyclic motionならば、Gauss曲線は閉曲線になる。
- $\beta = 0, \pi$ では、円盤の回転運動はdetectされない。（ガウスベクトルは北極/南極で固定される）
→ 極をさける「**正則化**」を行う



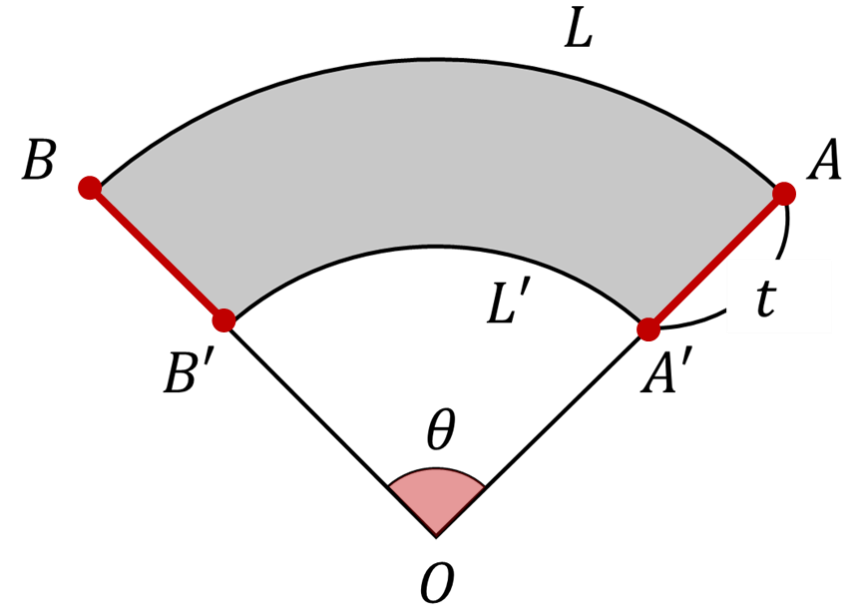
「バームクーヘンの補題」 再考

線分 AA' と線分 BB' の成す角 θ は

$$\theta = \frac{L - L'}{t}$$

で与えられる。

【ポイント1】 θ は「厚み」 t によらない
 $\Rightarrow t$ を無限小にとれる



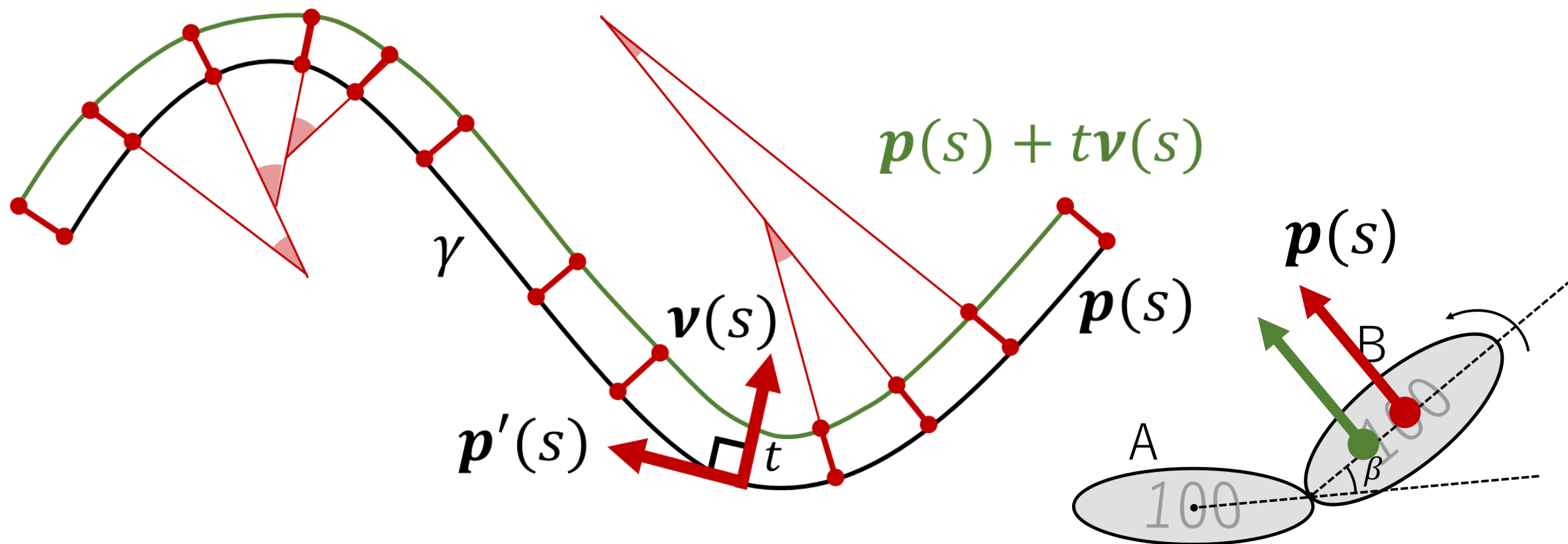
線分 AA' と線分 BB' の成す角 θ は、曲線 L_0 と距離 t だけ離れた曲線 L_t を用いて

$$\theta_{BK} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L_0 - L_t}{t}$$

で与えられる。

無限小バームクーヘンとガウス曲線

【ポイント2】（無限小）バームクーヘンと長方形をつなぎ合わせると、
任意の曲線に対して、BK角が定義できる。



「バームクーヘンの補題」から「測地的曲率」へ

【定義】 測地的曲率 (geodesic curvature)

$$\kappa_g(s) \equiv \mathbf{p}''(s) \cdot \mathbf{v}(s) = -\mathbf{p}'(s) \cdot \mathbf{v}'(s).$$

【命題】 **BK角**は**曲率の積分**である。 ;

$$\theta_{BK}(\gamma) = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{L_t - L_0}{t} = \int_0^L \kappa_g(s) ds$$

(証明)

$$\begin{aligned} \theta_{BK} &= -\frac{d}{dt} L_t \Big|_{t=0} = -\frac{d}{dt} \int_0^L |\mathbf{p}'(s) + t\mathbf{v}'(s)| ds \Big|_{t=0} \\ &= -\int_0^L \frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{p}'(s) + t\mathbf{v}'(s)| \Big|_{t=0} ds \\ &= -\int_0^L \frac{\mathbf{p}'(s) \cdot \mathbf{v}'(s) + t\mathbf{v}'(s) \cdot \mathbf{v}'(s)}{|\mathbf{p}'(s) + t\mathbf{v}'(s)|} \Big|_{t=0} ds \\ &= -\int_0^L \mathbf{p}'(s) \cdot \mathbf{v}'(s) ds \\ &= \int_0^L \kappa_g(s) ds. \end{aligned}$$

ガウス・ボンネの定理

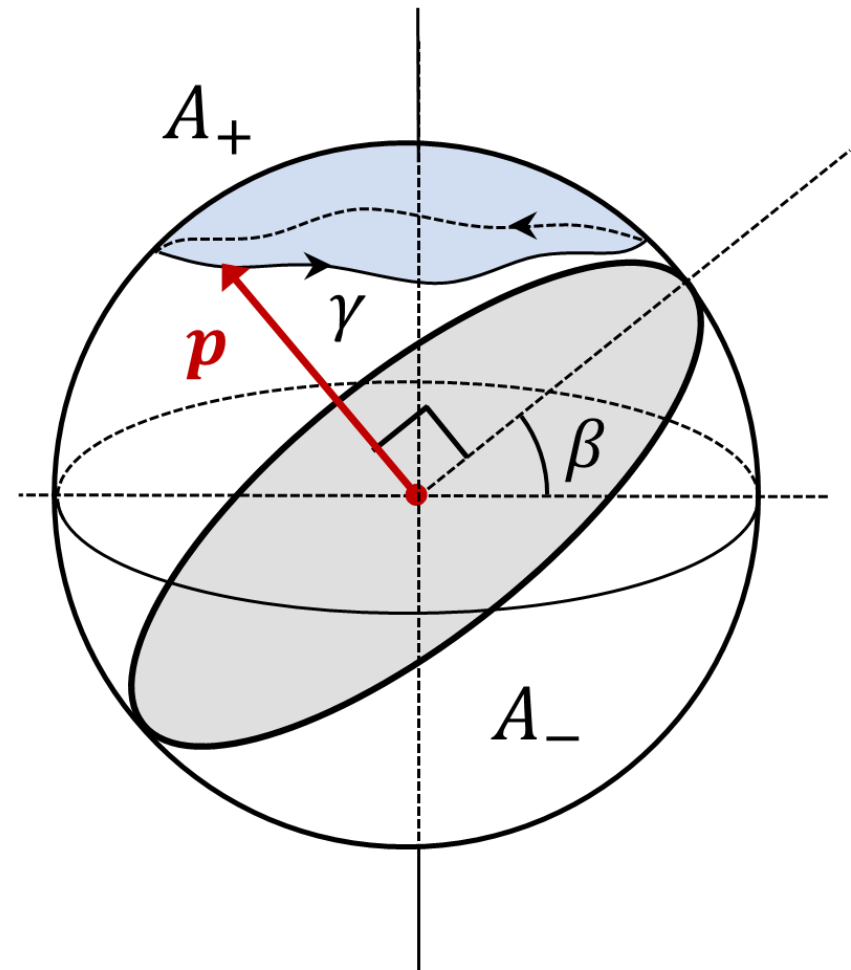
ガウス・ボンネの定理

(κ_g : 測地的曲率)

$$\int_{\gamma=\partial A_+} \kappa_g(s) ds = 2\pi - \int_{A_+} K \theta_1 \wedge \theta_2$$

単位球面 S^2 の場合は、 $K = 1$, $A_+ + A_- = 4\pi$

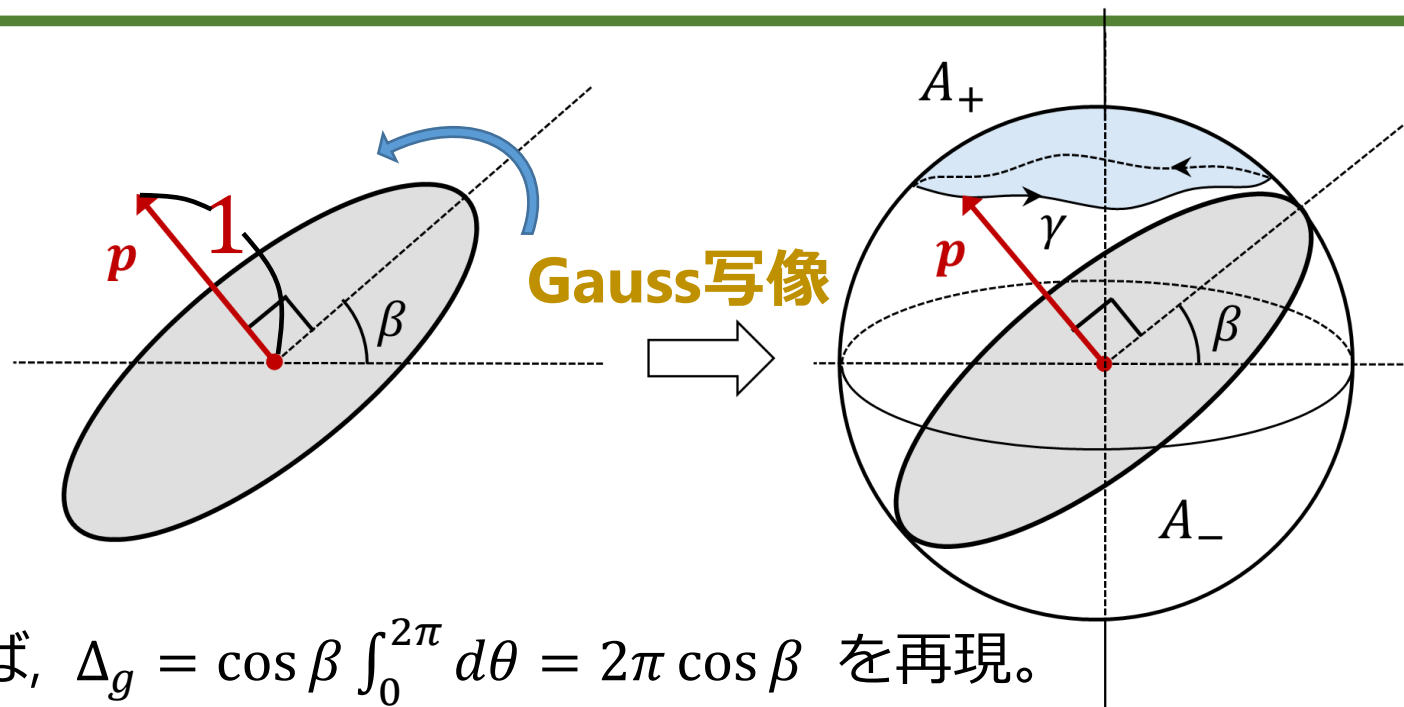
$$\int_{\gamma=\partial A_+} \kappa_g(s) ds = 2\pi - A_+$$



主結果1 [M-Takada-Yasukura, arXiv:2505.16749]

公転角 Δ_g は、Gauss曲線 γ 上の線積分で与えられる。 ;

$$\Delta_g = \int_0^{2\pi} \cos \beta(\theta) d\theta = \int_{\gamma} \cos \beta(t) \frac{d\theta(t)}{dt} dt$$



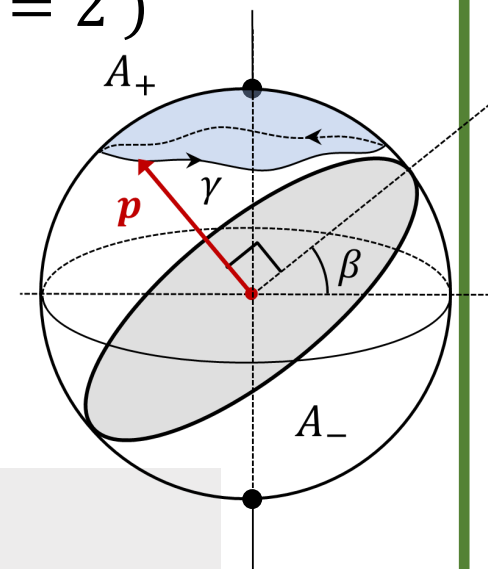
$\beta = \text{const.}$ ならば, $\Delta_g = \cos \beta \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \cos \beta$ を再現。

主結果2 [M-Takada-Yasukura, arXiv:2505.16749]

$A_{\pm}$: 曲線 γ の左(右)側に囲まれた部分の面積 ($A_+ + A_- = 4\pi$)

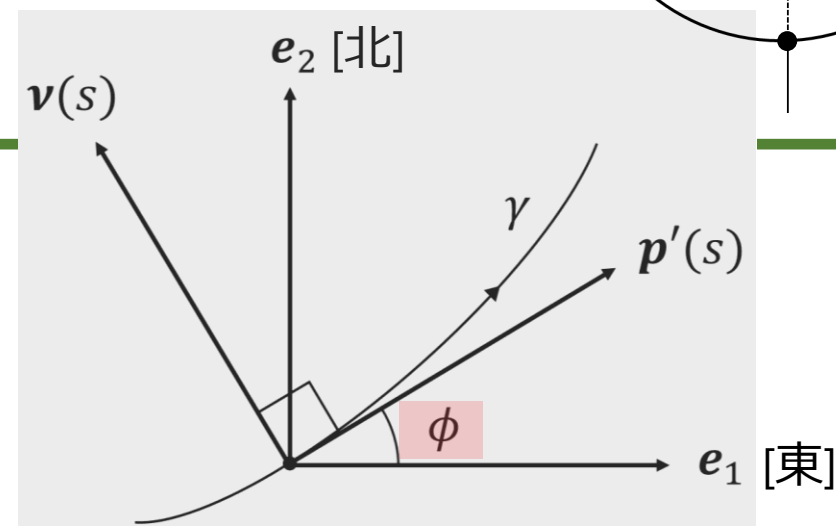
$I_{\pm}$: 領域 $A_{\pm}$ に含まれる北極・南極の個数 (**位相指数**) ($I_+ + I_- = 2$)

$$\begin{aligned}\Delta_g &= 2\pi I_+ - A_+ \\ &= -2\pi I_- + A_- \\ &= \frac{A_- - A_+}{2} + \pi(I_+ - I_-)\end{aligned}$$

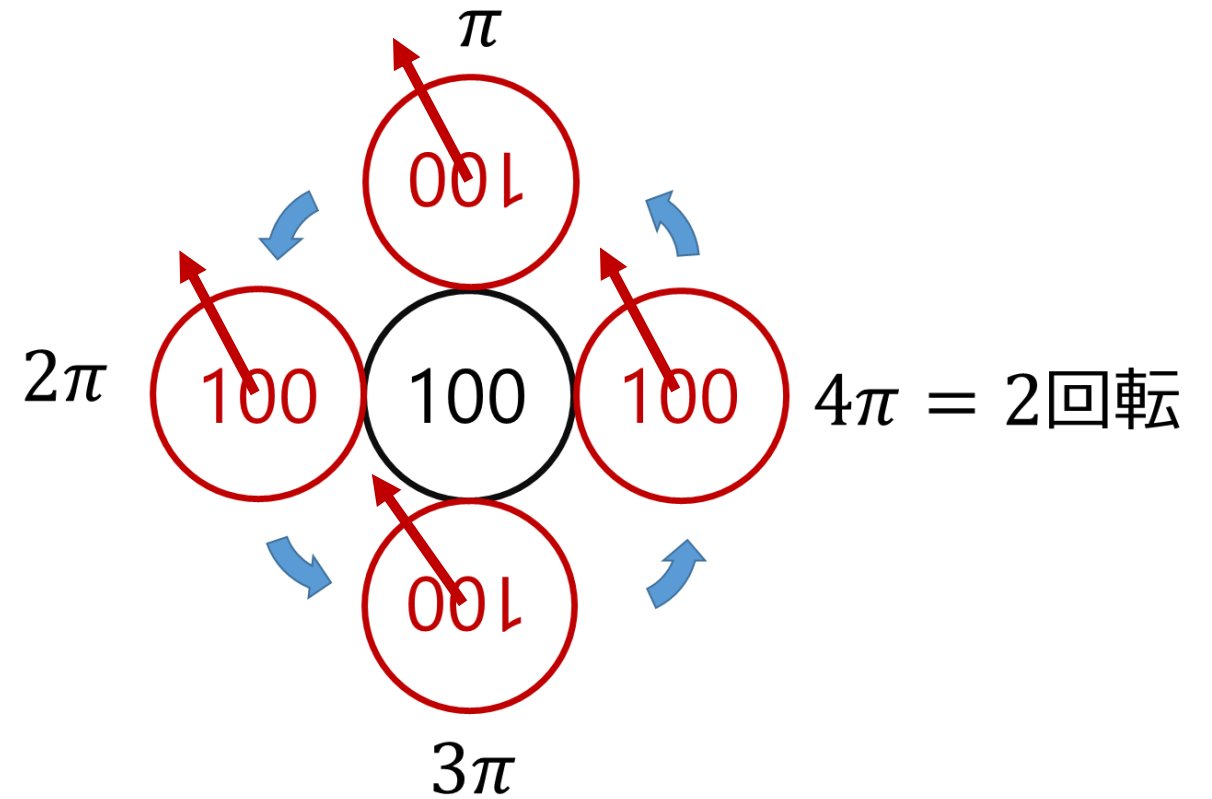
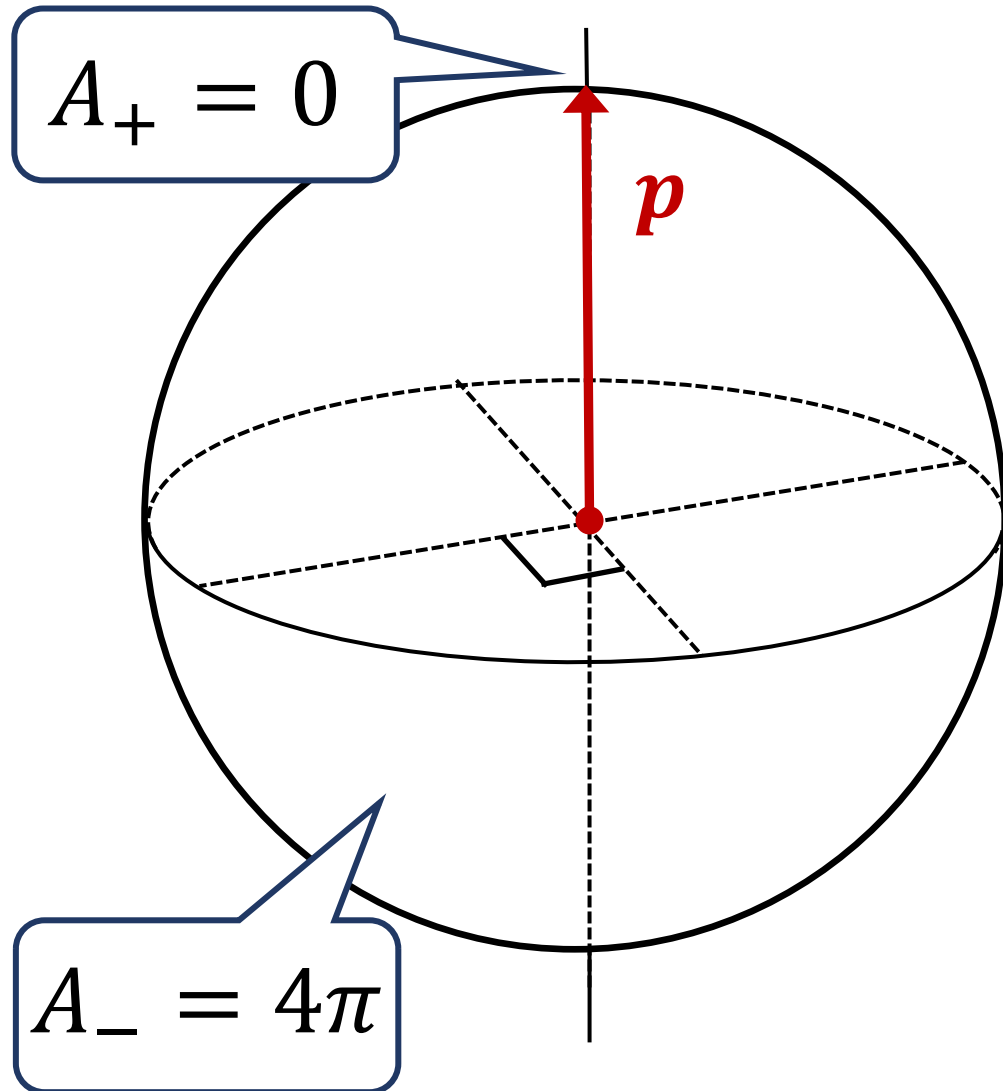


【証明】 ガウス・ボンネの定理と接線角 ϕ による。:

$$\Delta_g = \int_0^1 \cos\beta \frac{d\theta}{dt} dt = \int_{\gamma} (d\phi + \kappa_g ds) = 2\pi I_+ - A_+$$

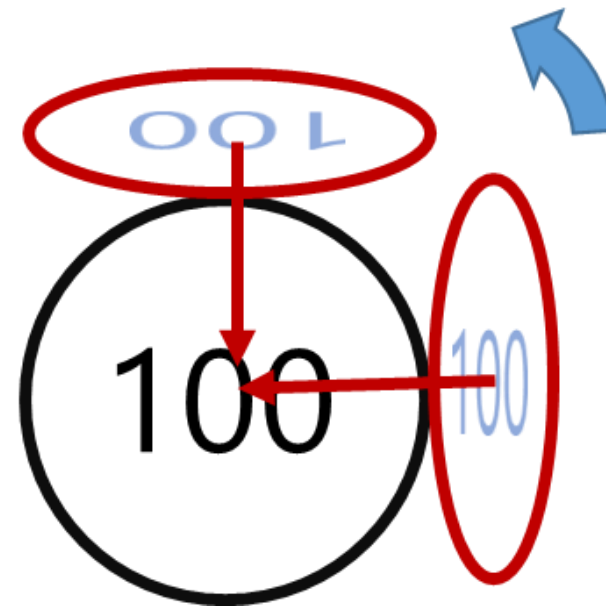
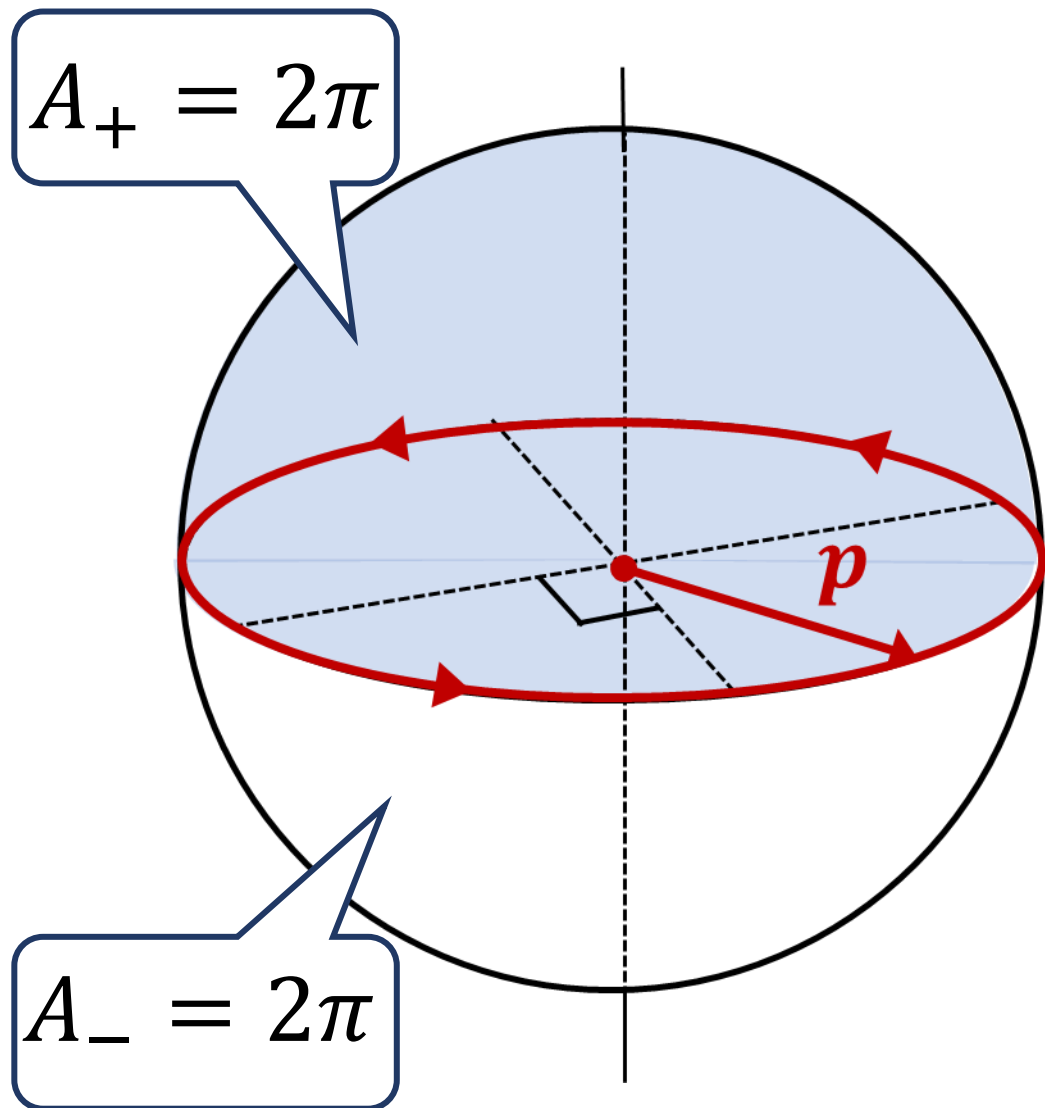


$\beta = 0$ の再現



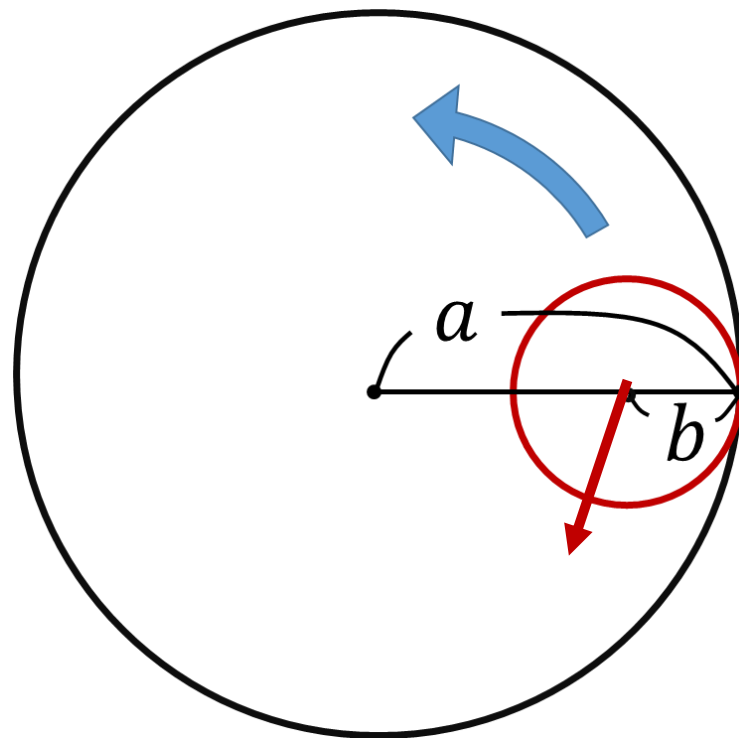
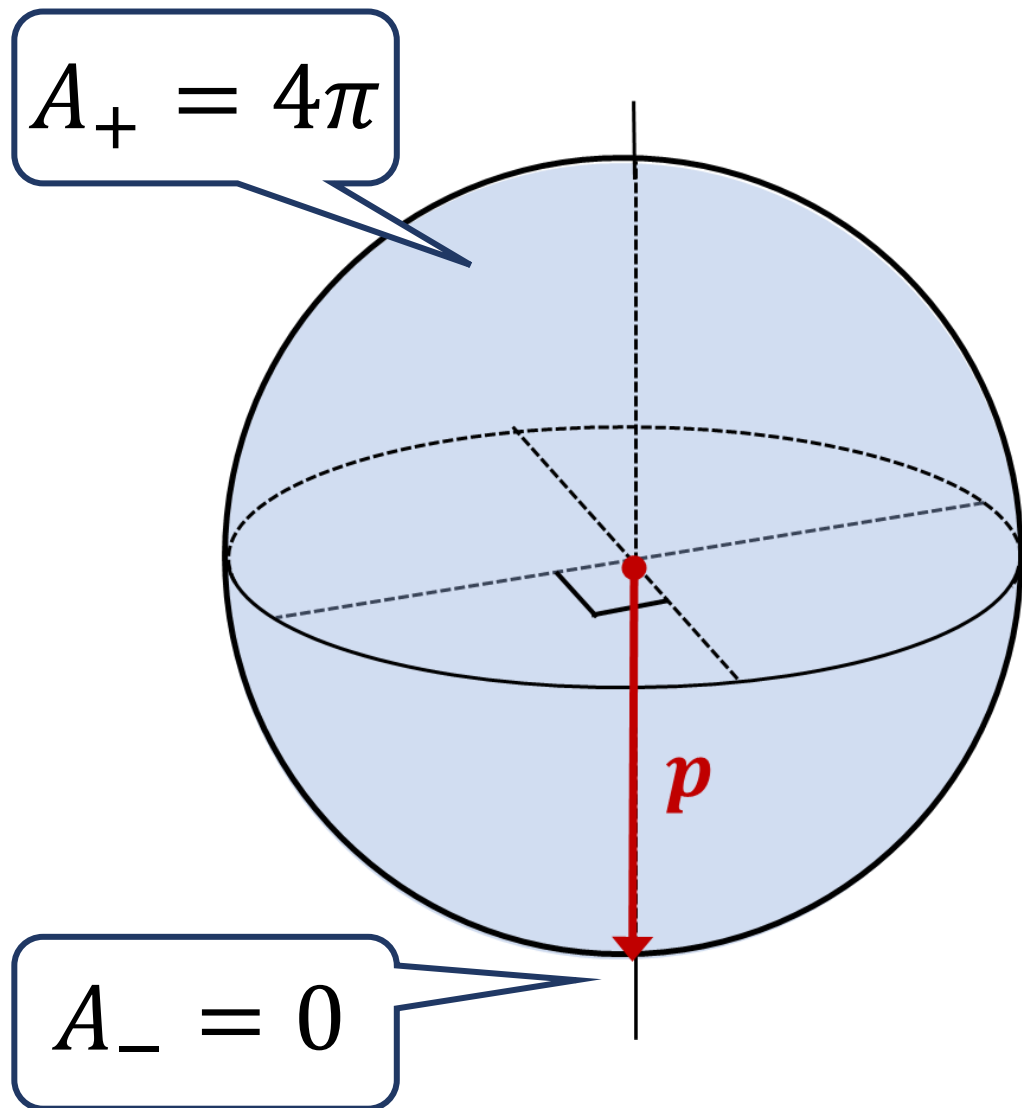
$$\Delta_g = \frac{A_- - A_+}{2} = \frac{4\pi - 0}{2} = \mathbf{2\pi}$$

$\beta = \frac{\pi}{2}$ の場合の再現



$$\Delta_g = \frac{A_- - A_+}{2} = \frac{2\pi - 2\pi}{2} = \mathbf{0}$$

$\beta = \pi$ の場合の再現



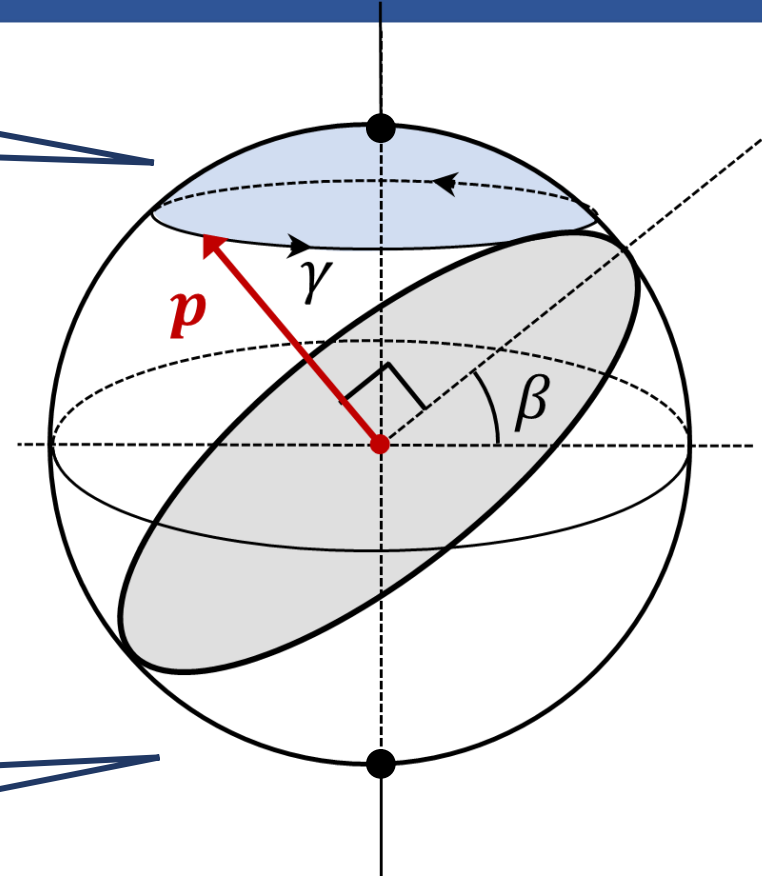
$$\Delta_g = \frac{A_- - A_+}{2} = \frac{0 - 4\pi}{2} = -2\pi$$

$\beta = (\text{一定})$ の再現

$$A_+ = 2\pi(1 - \cos \beta)$$

$$(I_+, I_-) = (1, 1)$$

$$A_- = 2\pi(1 + \cos \beta)$$

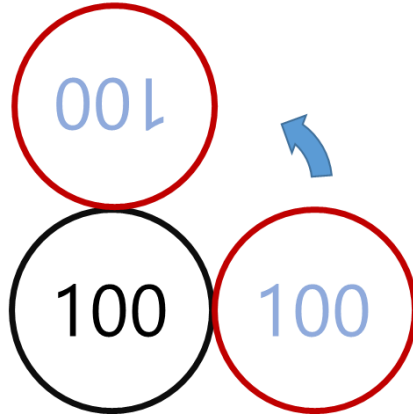


$$\Delta_g = 2\pi I_+ - A_+ = \frac{A_- - A_+}{2} + \pi(I_+ - I_-) = \mathbf{2\pi \cos \beta}$$

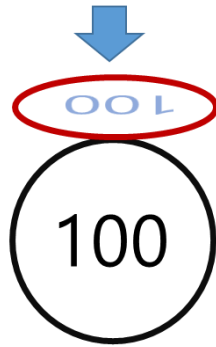
(OK!)

より一般の例 (β が変化する場合)

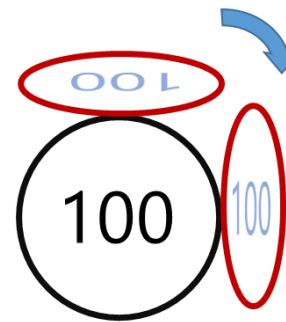
(1) $\beta = 0$ で
真上に移動



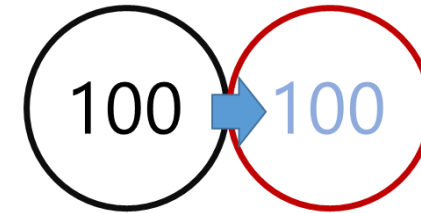
(2) 90度おこす。
($\beta = 0 \rightarrow \pi/2$)



(3) $\beta = \pi/2$ で
真横に移動

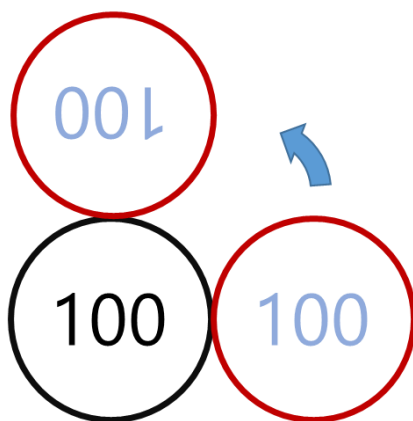


(4) 90度たおす。
($\beta = \pi/2 \rightarrow 0$)

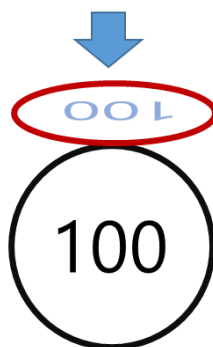


発展問題（ β が変化する場合）

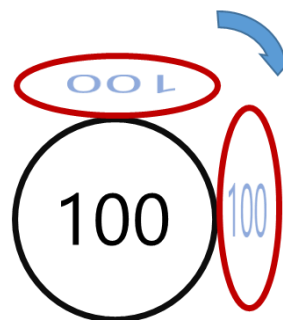
(1) $\beta = 0$ で
真上に移動



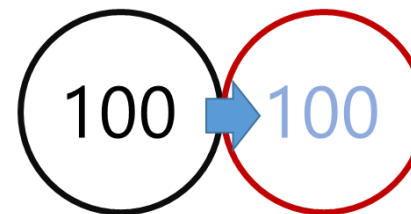
(2) 90度おこす。
($\beta = 0 \rightarrow \pi/2$)



(3) $\beta = \pi/2$ で
真横に移動



(4) 90度たおす。
($\beta = \pi/2 \rightarrow 0$)



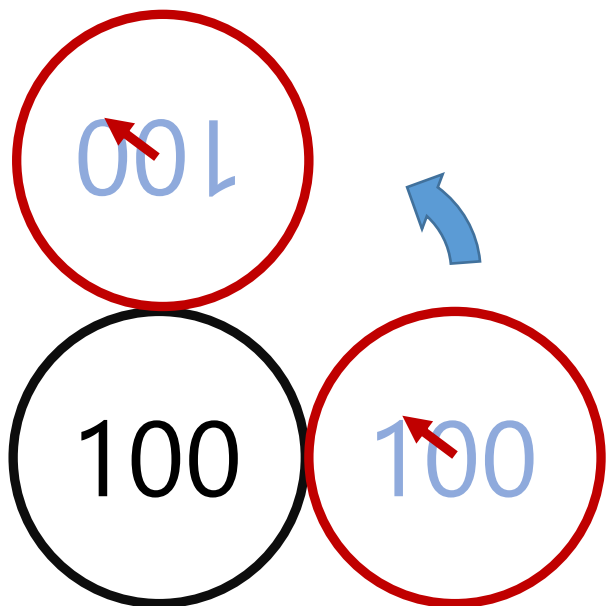
Δ_d (自転)	$\pi/2$	0	$-\pi/2$	0	= 0
Δ_g (公転)	$\pi/2$	0	0	0	= $\pi/2$

回転角は「反時計回りに90度」

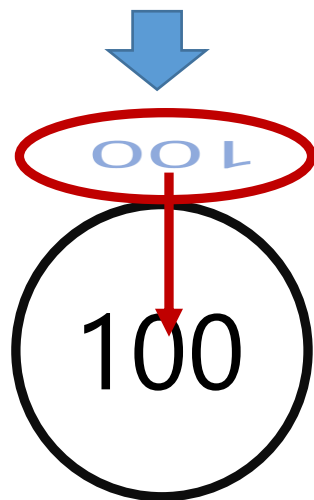
$$\Delta = \Delta_d + \Delta_g = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

対応する矢印 (ガウス写像)

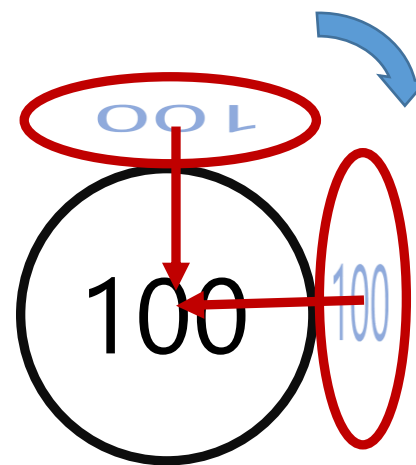
(1) $\beta = 0$ で真上に移動



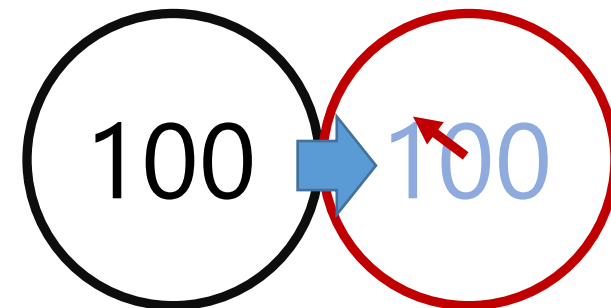
(2) 90度おこす。
($\beta = 0 \rightarrow \pi/2$)



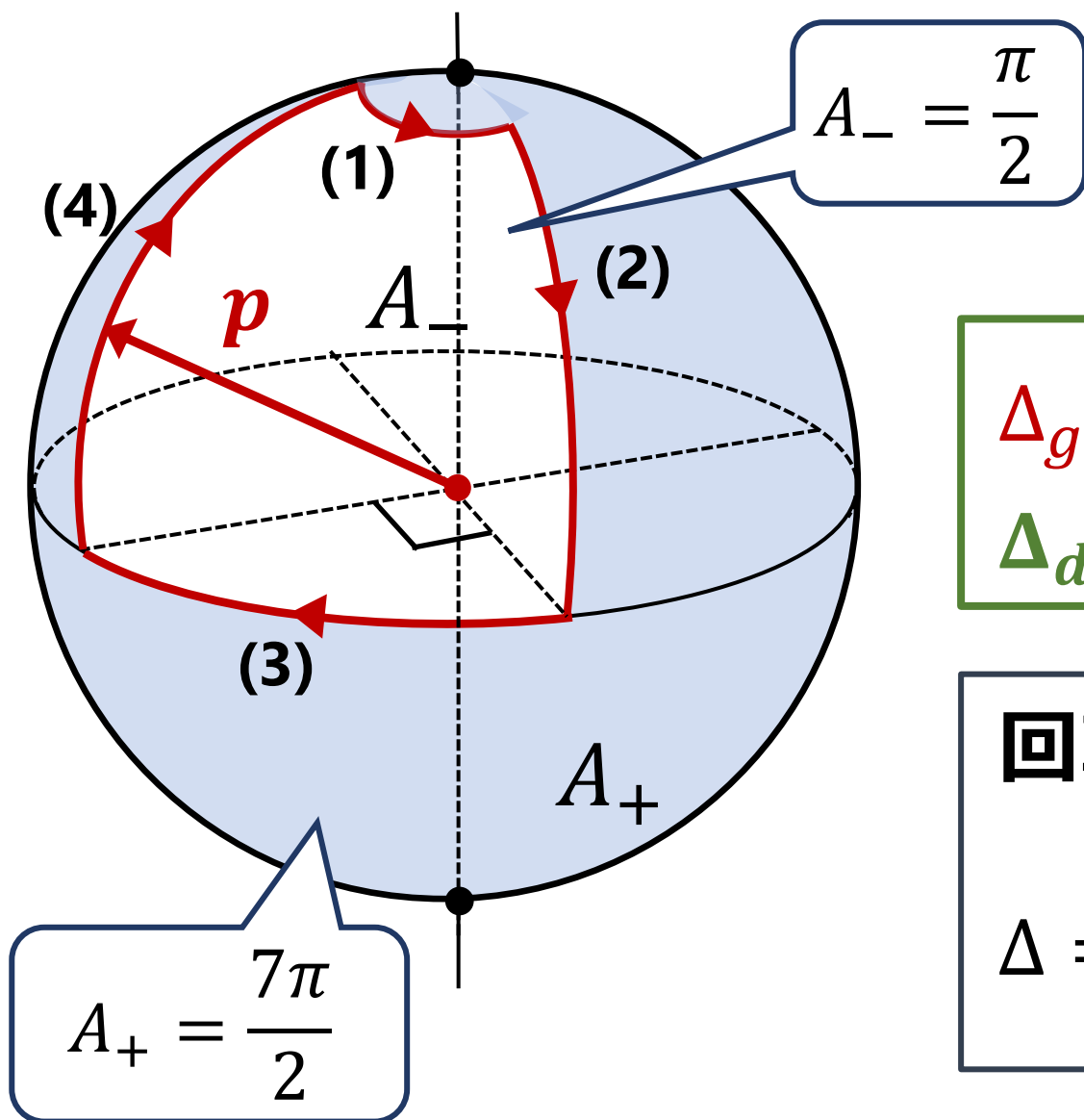
(3) $\beta = \pi/2$ で真横に移動



(4) 90度たおす。
($\beta = \pi/2 \rightarrow 0$)



単位球面でのガウス曲線



位相指数 : $(I_+, I_-) = (2, 0)$

$$\Delta_g = A_- - 2\pi I_- = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$
$$\Delta_d = 0 \text{ (自転)}$$

回転角は「反時計回りに90度」

$$\Delta = \Delta_d + \Delta_g = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ (Good!)}$$

目次

- ① 「回転円盤」 模型の定義
- ② 問題の一般化と幾何学的位相
- ③ ホップ束としての数学的定式化
- ④ 関連する物理現象
- ⑤ 剛体回転の幾何学的理論へ向けて

関連する現象

公転角は数学で「**U(1)ホロノミー**」、
物理では「**幾何学的位相**」と呼ばれている。

何の？
ホップ束の!!

これらが関係する現象として、例えば以下のものがある。 ;

- フーコーの振り子
- ディラックのモノポールポテンシャル
- ベリー位相

同じ年！

- Dirac monopole [1931]
- Hopf fibration [1931]

Heinz Hopf

A distinguished mathematician
known as

- ホップ代数
- ホップ束: $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$



Heinz Hopf
(19 November 1894 – 3 June 1971)
[Wikipedia]

- 主 $U(1)$ ファイバー束 $(\pi, S^3, CP^1 \simeq S^2, U(1) \simeq S^1)$: $((z_1, z_2) \in S^3 \subset C^2)$

$$\pi: S^3 \rightarrow CP^1, \quad \pi((z_1, z_2)) = [z_1: z_2] \in CP^1, \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$$

- 接続 (標準接続)** : $\omega \equiv \langle (z_1, z_2), d(z_1, z_2) \rangle = \bar{z}_1 dz_1 + \bar{z}_2 dz_2$

- 球面座標 : $z_1 = e^{i(\varphi+\theta)/2} \cos \beta, \quad z_2 = e^{i(\varphi-\theta)/2} \sin \beta$

$$\omega = i(d\varphi + \cos \beta d\theta): T_p S^3 \rightarrow u(1) \text{ (projector)}$$

- 水平部分空間 H_p と垂直部分空間 V_p : $T_p S^3 = H_p \oplus V_p$ (直和) ,

$$H_p = \ker \omega = \langle \partial_\theta - \cos \beta \partial_\varphi, \partial_\beta \rangle, \quad V_p = \{A^* | A \in u(1)\} = \langle \partial_\varphi \rangle$$

- $(R_a)_* H_p = H_{pa}$: H_p は右 $U(1)$ 作用で不変

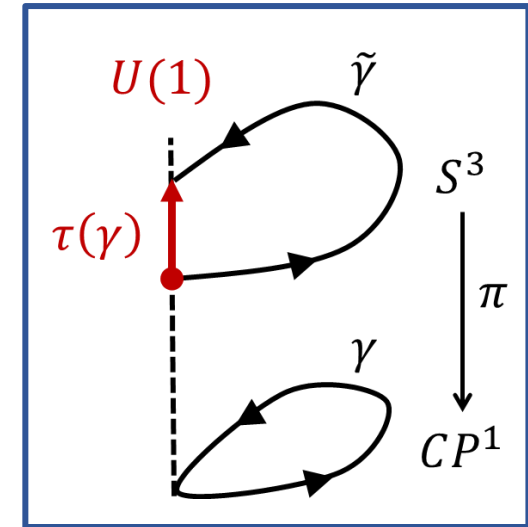
- 曲線 $\gamma = \{x(t) \in CP^1\}_{0 \leq t \leq 1}$ の水平持ち上げ:

$$\tilde{\gamma} = \{\tilde{x}(t) \in S^3\}_{0 \leq t \leq 1} \quad \text{s.t.} \quad \pi(\tilde{x}(t)) = x(t) \quad \text{and} \quad \frac{d\tilde{x}}{dt} \in H_x$$

- 水平条件: $\omega\left(\frac{d}{dt}\right) = i\left(\frac{d\varphi}{dt} + \cos\beta \frac{d\theta}{dt}\right) = 0$ (平行移動)

- 曲線 γ のホップ $\tau(\gamma) \in U(1)$ と幾何学的位相 Δ_g の関係

[M]



$$\tau(\gamma) = \exp\left(\frac{i}{2} \int_0^1 \dot{\varphi} dt\right) = \exp\left(-\frac{i}{2} \int_0^1 \cos\beta \dot{\theta} dt\right) = \exp\left(-\frac{i}{2} \Delta_g\right)$$

(符号はGaussベクトルの規約による)

ホップ束

曲線 γ のホロノミー $\tau(\gamma) \in U(1)$ と幾何学的位相 Δ_g は、

1/2だけズレている。 $\tau(\gamma) = \exp(-\frac{i}{2}\Delta_g)$

そこで、「重み2写像」を次で定める。 $\rho_2: U(1) \rightarrow U(1), u \mapsto u^2$

重み2写像は、holonomy（数学）と幾何学的位相（物理）を結ぶ。

$$\rho_2(\tau(\gamma)) = \tau(\gamma)^2 = \exp(-i\Delta_g).$$

【注1】 "2"は、二重被覆 $SU(2) \rightarrow SO(3)$ に由来する。

【注2】 ホロノミーによる記述では、位相指数は見えない。 $\Delta_g = 2\pi I_+ - A_+$

目次

- ① 「回転円盤」 模型の定義
- ② 問題の一般化と幾何学的位相
- ③ ホップ束としての数学的定式化
- ④ 関連する物理現象
- ⑤ 剛体回転の幾何学的理論へ向けて

「回転円板模型」は「幾何学的位相」の代表例

物理

回転円板

フーコー振り子

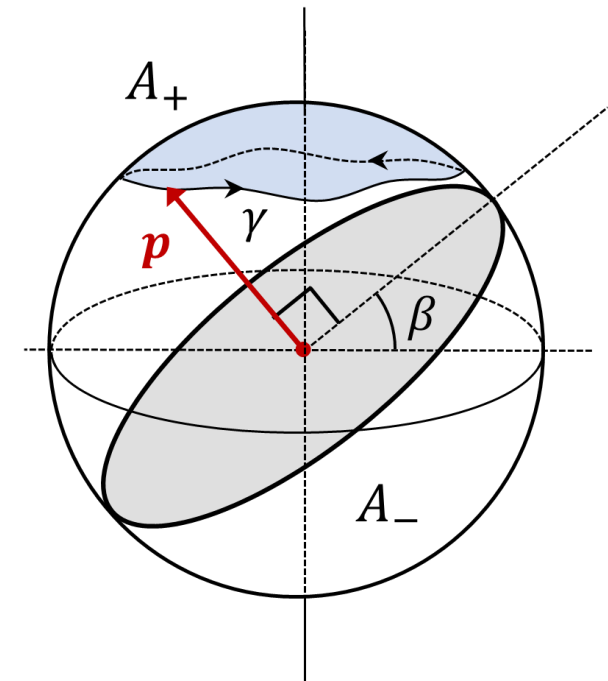
ディラックの
磁気単極子

ベリー位相

数理物理

数学（微分幾何）

ホップ束



光ファイバー内を
進む光の偏光面

フーコーの振り子



フランスパリのパンテオンのフーコーの振り子。
[Wikipediaより]

振り子は回っていない。
我々が Δ_g だけ回っている！

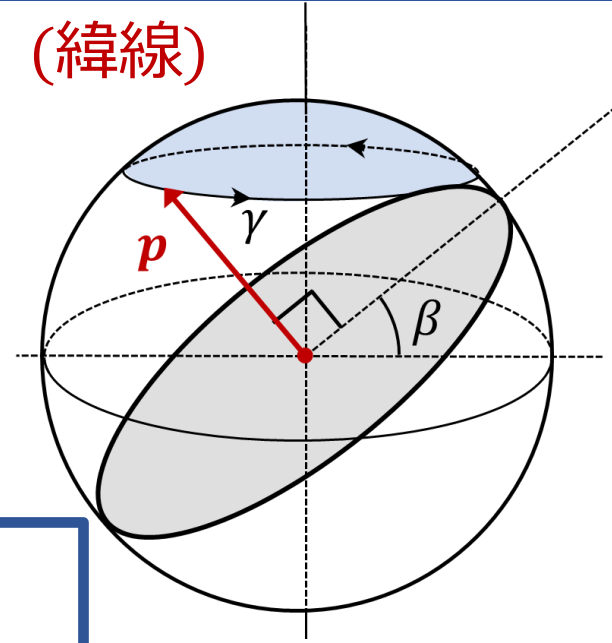
「フーコーの正弦則」

振り子の振動面は24時間で

$$2\pi \sin(\text{緯度}) = 2\pi \cos \beta = \Delta_g$$

だけ回る。

$\gamma =$ (緯線)



Jean Bernard Léon Foucault
(1819年9月18日 - 1868年2月11日)

[Wikipedia]

「Gyroscope」 (回転を見る) の命名者

「回転円板模型」と「フーコーの振り子」の対応

回転円盤模型で現れた球面 S^2 を、ここでは地球そのものとして見る。

回転円板模型

単位球面 (S^2)

Disc B

ガウス曲線

公転角 (幾何学的位相) Δ_g

フーコーの振り子

地球表面

コンパス

(宇宙から見た) 振り子の軌道

振動面の回転角 Δ_{Fou}

$$\Delta_g = -\Delta_{Fou}$$

振り子は、Disc B (局所動標構)
とは反対向きに回転する

標準接続のフーコー表現

$$\omega = \frac{i}{2} (d\varphi - d\phi + \kappa_g ds) = 0 \quad (\text{水平条件})$$

ファイバー座標 (天空の幾何)

速度方向と測地線 (地上の幾何)

We all live in the Hopf fibration

- 「フーコーの振り子」の振動面の回転もホップ束のホロノミーです

[M]

[Anzaldo-Meneses, Monroy-Perez, 2012]

[Marsden, O'Reilly, Wicklin, Zombro, 1991]

- つまり、振り子 (=ジャイロスコープ) は、ホップ束のホロノミーを感じています

- でもそれは、地球上にいる我々も同じことです (人間には五感のほかに、

U(1)ホロノミーを感じる器官 (三半規管) を持っているのです)

- つまり、**我々は「ホップ束の水平切断」であり「標準接続 (Berry-Simon接続)」**

によって、今この瞬間も地球の自転によって 捻られています！

- だから本当に **“We all live in the Hopf fibration!”** なんです



一般化されたフーコーの振り子

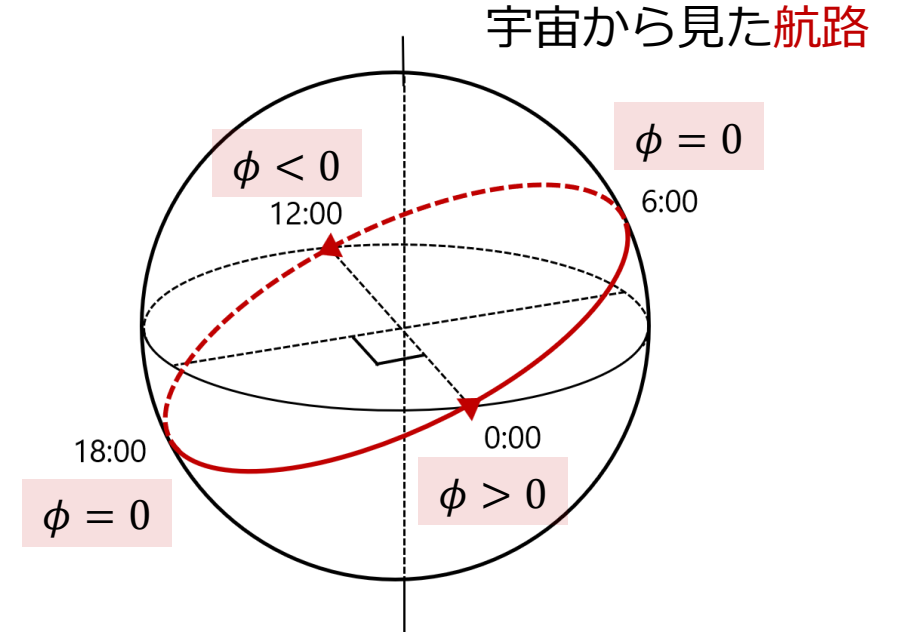
振り子が準静的に移動できる理想的な状況を考える。

【例】 太平洋上、巨大タンカーに設置されたフーコーの振り子

航路 : 0:00 赤道直下 → (北上) → 6:00 南へ方向転換 → (南下) → 12:00 赤道直下
→ (南下) → 18:00 北へ転換 → (北上) → 24:00 赤道直下

$$\Delta_{Fou} = - \int_0^1 \cos \beta \frac{d\theta}{dt} dt = - \int_{\gamma} (d\phi - \kappa_g ds) = - \int_{\gamma} d\phi = 0$$

- 航路が測地線（大円）とすれば、 $\kappa_g = 0$
- ϕ は緯線と航路のなす角で、AMは $d\phi < 0$ 、PMは $d\phi > 0$
- 振り子は、午前中は時計回り、午後は反時計回り、24時間後、振り子はぴったり同じ場所に戻る。



Dirac のモノポールポテンシャル

磁荷 g の「モノポール」が作る磁場 $\vec{B} = \frac{g}{r^2} \mathbf{e}_3$ に対して、 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ となるようなベクトル場 $\vec{A}$ をDiracのモノポールポテンシャルという。

$$\vec{A}_N = g \frac{1 + \cos \beta}{r \sin \beta} \mathbf{e}_1 \quad (\beta \neq 0), \quad \vec{A}_S = g \frac{-1 + \cos \beta}{r \sin \beta} \mathbf{e}_1 \quad (\beta \neq \pi)$$

「導出」 $\vec{A}$ は「緯線方向に吹く偏西風」 と思う。風速は $f(\beta)$:
 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ に代入し、球冠(cap)上で積分する。

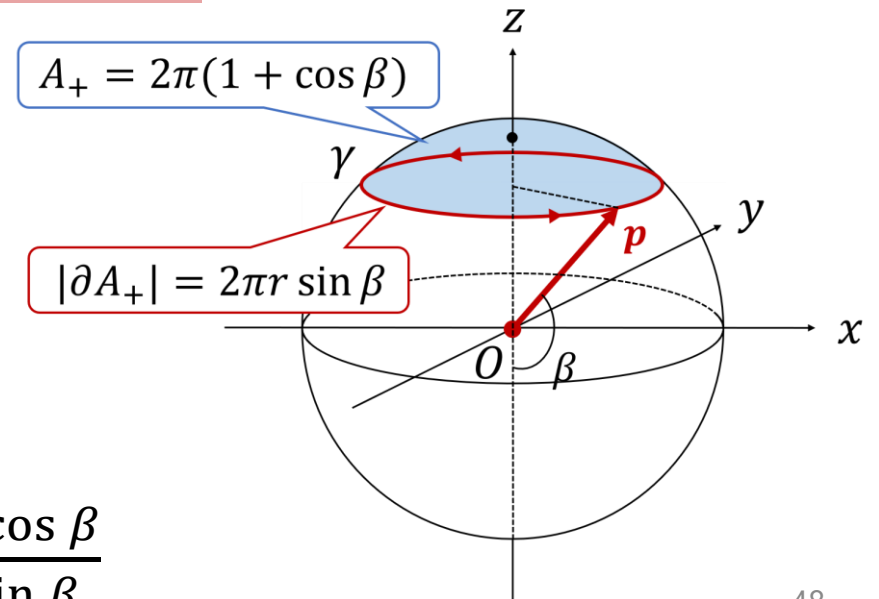
$$\vec{A} = f(\beta) \mathbf{e}_1$$

$$\int_{A_+} \frac{g}{r^2} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 dA_+ = \int_{A_+} (\nabla \times \vec{A}) \cdot \mathbf{e}_3 dA_+ = \int_{\partial A_+} \vec{A} \cdot \mathbf{e}_1 ds$$

$$\frac{g}{r^2} \times (A_+ \text{の面積})$$

$$f(\beta) \times (\partial A_+ \text{の長さ})$$

$$f(\beta) = \frac{g}{r^2} \times \frac{(A_+ \text{の面積})}{(\partial A_+ \text{の長さ})} = \frac{g}{r^2} \times \frac{2\pi r^2 (1 + \cos \beta)}{2\pi r \sin \beta} = g \frac{1 + \cos \beta}{r \sin \beta}$$



モノポールポテンシャルと局所切断

ホップ束 $U(1) \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$ の標準接続 $\omega = i(d\varphi + \cos \beta d\theta)$ の局所切断 $\sigma_{N,S}: U_{N,S} \subset S^2 \rightarrow \pi^{-1}(U_{N,S}) \subset S^3$

$$\sigma_N(\beta, \theta) = \left(\cos \frac{\beta}{2}, e^{-i\theta} \sin \frac{\beta}{2} \right), \quad \sigma_S(\beta, \theta) = \left(e^{i\theta} \cos \frac{\beta}{2}, \sin \frac{\beta}{2} \right)$$

による引き戻しが、モノポールポテンシャルに他ならない。(同一視: $e_1 \leftrightarrow r \sin \beta d\theta$)

$$\begin{aligned} \sigma_N^*(\omega) &= i(1 + \cos \beta) d\theta = A_N, \\ \sigma_S^*(\omega) &= i(-1 + \cos \beta) d\theta = A_S \end{aligned} \quad (\text{ゲージ変換: } A_N - A_S = 2id\theta)$$

$g = 1$ の Dirac のモノポールポテンシャルは、ホップ束の標準接続の局所表示

【歴史と文献】

1931: Dirac monopole (physics) / Hopf fibration (topology)

1979–80: それらの同値性の認識 [Minami][Ryder]

- M. Minami, "Dirac's Monopole and the Hopf Map," *Progress of Theoretical Physics* 62 (1979), 1128–1142
- L. H. Ryder, "Dirac monopoles and the Hopf map $S^3 \rightarrow S^2$," *Journal of Physics A: Mathematical and General* 13 (1980)

Berry位相（2準位系）とホップ束

2 準位量子系の規格化状態 $|\psi\rangle$ は、 $S^3 \simeq SU(2)$ をなす。

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1, \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$$

純粋状態は「位相」を同一視する $|\psi\rangle \simeq e^{i\theta} |\psi\rangle$ ので、

純粋状態の空間は $[|\psi\rangle] \in S^3/U(1) \simeq \mathbb{C}P^1$ (**Bloch球面**)

射影 $\pi: |\psi\rangle \mapsto [|\psi\rangle]$ は、ホップ束の構造そのもの：

$$U(1) \longrightarrow S^3 \xrightarrow{\pi} S^2$$

Berry接続とホップ束の局所接続

2 準位量子系のHamiltonianとその固有状態（固有値=1）： $|\psi_N\rangle = e^{i\theta} |\psi_S\rangle$

$$H = \frac{1}{r}(x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z) = \begin{bmatrix} -\cos\beta & e^{-i\theta}\sin\beta \\ e^{i\theta}\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \quad |\psi_N\rangle = \begin{pmatrix} \sin\frac{\beta}{2} \\ e^{i\theta}\cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}, \quad |\psi_S\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\theta}\sin\frac{\beta}{2} \\ \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

Berry接続は、ホップ束の局所接続に対応する。：

$$\langle\psi_N|d|\psi_N\rangle = \frac{i}{2}(1 + \cos\beta)d\theta = \frac{1}{2}\sigma_N^*(\omega), \quad (\beta \neq 0)$$

$$\langle\psi_S|d|\psi_S\rangle = \frac{i}{2}(-1 + \cos\beta)d\theta = \frac{1}{2}\sigma_S^*(\omega), \quad (\beta \neq \pi)$$

Berry位相と公転角（geometric phase）の関係：

$$\gamma_B = i\oint \langle\psi_N|d|\psi_N\rangle \pmod{2\pi} \quad \Delta_g = -2i\oint \langle\psi_N|d|\psi_N\rangle - 2\pi n$$

$$\Delta_g \equiv -2\gamma_B \pmod{2\pi}$$

ホップ束が現れる物理（まとめ）

$$U(1) \longrightarrow S^3 \xrightarrow{\pi} S^2$$

物理系	底空間 S^2 上の点	$U(1)$ ファイバー
回転円板	ガウスベクトル	公転角
フーコー振り子	振り子の地球上の位置	振動面の回転角
Dirac モノポール	monopoleから見た方向	$U(1)$ ゲージ
ベリー位相（2準位系）	純粋状態/Bloch ベクトル	量子的位相

問い：多様な物理にホップ束が現れるのは偶然だろうか？

答え：「ものが回れば、ホップ束のホロノミーを拾う」（犬も歩けば、、）

精密化：剛体の姿勢をそのものを $SU(2)$ によって記述すると、ホップ束は内在的な構造として見えてくる。

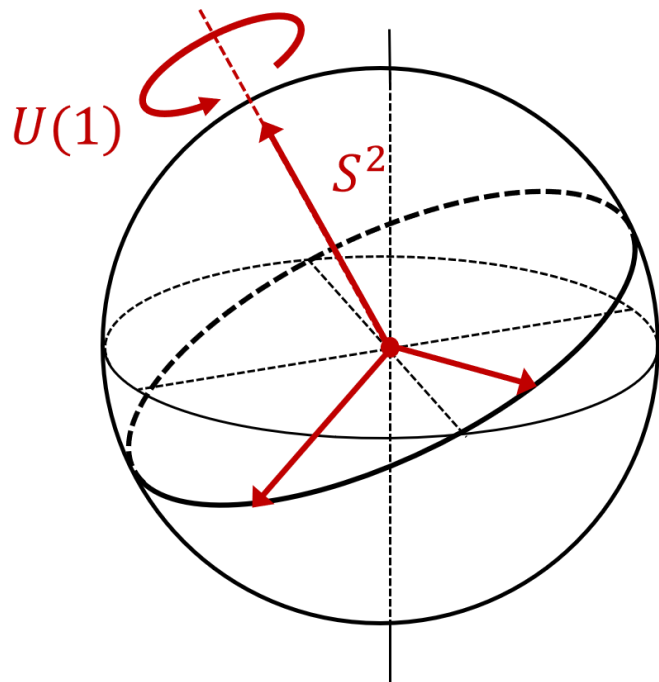
目次

- ① 「回転円盤」 模型の定義
- ② 問題の一般化と幾何学的位相
- ③ ホップ束としての数学的定式化
- ④ 関連する物理現象
- ⑤ 剛体回転の幾何学的理論へ向けて

剛体姿勢の $SU(2)$ による記述

ホップ束が剛体理論で必然的に現れる理由

R^3 の正規直交基底のある方向を指定する自由度が S^2 ,
その周りの回転の自由度が $U(1)$, 姿勢空間全体は $SU(2) \simeq S^3$ である。



3つ同型な3次元ベクトル空間 $V_S \simeq V_B \simeq R^3$ を導入する

$$V_S = \text{span}\{e_1^S, e_2^S, e_3^S\} \text{ (空間固定フレーム)}$$

$$V_B = \text{span}\{e_1^B, e_2^B, e_3^B\} \text{ (剛体固定フレーム)}$$

$$R^3 \simeq \mathfrak{su}(2), (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3$$

剛体姿勢は $g \in SU(2)$ による V_B から V_S への随伴写像 :

$$\text{Ad}_g: V_B \rightarrow V_S, \quad X_S = \text{Ad}_g X_B = g X_B g^{-1}$$

$SU(2)$ の左作用と右作用

剛体姿勢 $\text{Ad}_g: V_B \rightarrow V_S, \quad X_S = \text{Ad}_g X_B = g X_B g^{-1}, \quad g \in SU(2)$

$SU(2) \ni g$ には $SU(2)_L \times SU(2)_R \ni (g_L, g_R)$ が作用する。 : $g \mapsto g_L g g_R^{-1}$

作用	空間固定枠 X_S	剛体固定枠 X_B
$SU(2)_L$	$X_S \rightarrow g_L X_S g_L^{-1}$	fixed
$SU(2)_R$	fixed	$X_B \rightarrow g_R X_B g_R^{-1}$

左作用は空間固定フレーム X_S を、右作用は剛体固定フレーム X_B を回す。

剛体の基準軸の選択とホップ射影

- 剛体姿勢全体は $SU(2)$ で記述される。剛体フレームから基準軸 s_3 を選択する。

これは空間フレームでは $\text{Ad}_g s_3 = g s_3 g^{-1}$ となる。この対応を

$$\pi: SU(2) \rightarrow S^2, \quad g \mapsto g s_3 g^{-1}$$

で表す。これは、ホップ射影そのものである。

- 基準軸 s_3 を固定すると、右作用 $SU(2)_R$ は $U(1)_R = \{e^{\alpha s_3}\}$ に破れる。 :

$$g s_3 g^{-1} \mapsto (g e^{-\alpha s_3}) s_3 (g e^{-\alpha s_3})^{-1} = g s_3 g^{-1}$$

$U(1)_R$ は s_3 軸まわりの剛体回転の自由度を表す。

対称性の破れ

$$SU(2)_L \times SU(2)_R \rightarrow SU(2)_L \times U(1)_R$$

- 射影 $\pi(g e^{\alpha s_3}) = \pi(g) \in S^2$ は同一視 $SU(2)/U(1)_R \simeq S^2$ を与え、 $U(1)_R$ はホップ束の構造群となる。

$$U(1)_R \longrightarrow SU(2) \xrightarrow{\pi} S^2$$

角速度と標準接続

- 剛体固定ベクトル X_B ($\dot{X}_B = 0$) の時間発展を空間固定枠で見ると、

$$X_S(t) = g(t)X_B g(t)^{-1} \quad \text{with} \quad g(t) \in SU(2)$$

- これを微分すると、**Heisenberg型の時間発展方程式**を得る。：

$$\dot{X}_S = \dot{g}X_B g^{-1} - gX_B g^{-1}\dot{g}g^{-1} = [\Omega_S, X_S] \quad \text{where} \quad \Omega_S \equiv \dot{g}g^{-1} \text{ 「空間角速度」}$$

- Ω_S の剛体固定枠への引き戻しとして、「**剛体角速度**」 Ω_B を定義する。：

$$(\text{Ad}_g)^{-1}: V_S \rightarrow V_B, \quad \Omega_B \equiv g^{-1}\Omega_S g = g^{-1}\dot{g}$$

- ホップ束の**標準接続**は $\omega_3 = \langle g^{-1}dg, s_3 \rangle$ (MC1形式の s_3 成分) であり、 $\Omega_{B/S}$ と次の関係にある。

$$\omega_3(\dot{g}) = \langle \Omega_B, s_3 \rangle = \langle \Omega_S, g s_3 g^{-1} \rangle$$

標準接続は、剛体角速度の基準軸 s_3 成分に他ならない！

剛体回転の水平・垂直分解

- 任意の剛体運動 $g(t) \in SU(2), t \in [0,1]$ から、基準軸 s_3 の軌道 $\gamma(t) = \pi(g(t)) \in S^2$ を取り出す。 **(ガウス曲線)**
- 同じ軌道 $\gamma(t)$ を与える水平軌道 $g_H(t) \in SU(2)$ が、以下の条件から一意に決まる。 ;
 $\pi(g_H) = \gamma, \omega_3(\dot{g}_H) = 0, g_H(0) = g(0)$ **(ガウス曲線の水平リフト)**
- 任意の $t \in [0,1]$ で、次の一意的な分解が成り立つ。

$$g(t) = g_H(t)u(t), \quad u(t) \in U(1)_R, \quad u(0) = 1$$

幾何的平行移動

「幾何学的位相」

ファイバー方向の回転

「動的位相」

ホップ束の接空間の直和分解

$$T_p SU(2) = H_p \oplus V_p$$

$$H_p = \ker \omega_3, \quad V_p \simeq \text{Im } \omega_3$$

幾何学的位相と動的位相

- 剛体運動 $g(t) \in SU(2)$ の水平・垂直分解 : $T_p SU(2) = H_p \oplus V_p$, $H_p = \ker \omega_3$, $V_p \simeq \text{Im } \omega_3$

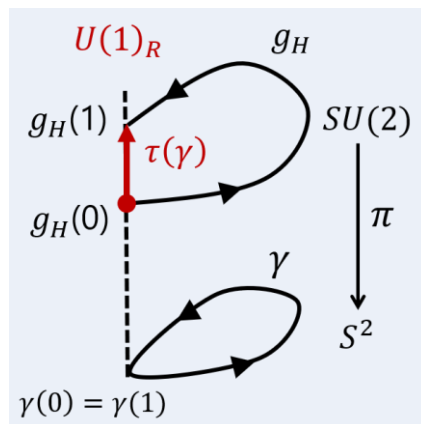
$$g(t) = g_H(t)u(t), \quad \omega_3(\dot{g}_H) = 0, \quad u(t) \in U(1)_R$$

- 基準軸 s_3 の周期運動を考える。 : $\gamma(1) = \gamma(0)$, $\gamma(t) = \pi(g(t)) = gs_3g^{-1}$, $t \in [0,1]$.

幾何学的位相 (ω_3 の核)

平行移動がホロノミーを与える。

$$g_H(1) = g_H(0)h_g, \quad h_g = \tau(\gamma) \in U(1)_R$$



動的位相 (ω_3 の像 $\simeq$ 垂直成分)

剛体基準軸 s_3 周りの回転角が、fiberの変化を与える。

$$u(1) = u(0)h_d, \quad h_d \in U(1)_R$$

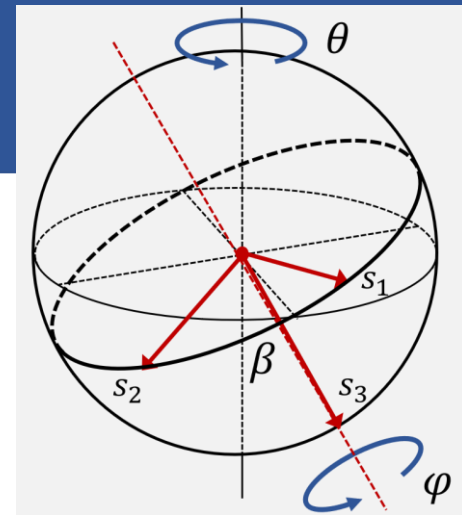
$$h_d = \exp \left[s_3 \int_0^1 \omega_3(\dot{g}) dt \right] = \exp \left[s_3 \int_0^1 \langle \Omega_B, s_3 \rangle dt \right]$$

$$\text{以上合わせて、 } g(1) = g(0)h_g h_d, \quad h_g, h_d \in U(1)_R$$

物理的な回転角としては、次の分解を得る。 :

$$\Delta_{tot}(\text{全回転角}) = \Delta_g(\text{幾何学的位相}) + \Delta_d(\text{動的位相}) \mod \text{fiber 周期}$$

円板模型（傾き一定のコマの歳差運動）への応用



- 剛体姿勢の具体的表示： $g(t) = e^{\theta(t)s_3} e^{(\pi-\beta)s_2} e^{\varphi(t)s_3} \in SU(2)$ with $\beta = \text{const.}$

($\theta(t) = 2\pi t$: 歳差角, β : 基準軸の傾き, $\varphi(t)$: ファイバー座標)

- ホップ射影： $\gamma(t) = g s_3 g^{-1} = \sin\beta \cos\theta s_1 + \sin\beta \sin\theta s_2 - \cos\beta s_3 \in S^2$

- 標準接続と剛体角速度： $\omega_3 = d\varphi - \cos\beta d\theta$, $\Omega_B = -\dot{\theta} \sin\beta \cos\varphi s_1 + \dot{\theta} \sin\beta \sin\varphi s_2 + (\dot{\varphi} - \cos\beta \dot{\theta}) s_3$

$$(\because) \quad \omega_3(\dot{g}) = \langle \Omega_B, s_3 \rangle = \dot{\varphi} - \cos\beta \dot{\theta}$$

- No-slip条件 $\langle \Omega_B, s_3 \rangle = \frac{a}{b} \dot{\theta}$ より、**動的位相**は $\Delta_d = \int_0^1 \omega_3(\dot{g}) dt = \frac{a}{b} \int_0^1 \dot{\theta} dt = \frac{2\pi a}{b}$

- **幾何学的位相**は、 $\omega_3(\dot{g}_H) = 0$ から $\dot{\varphi}_H = \cos\beta \dot{\theta}$. よって、 $\Delta_g = \cos\beta \int_0^1 \dot{\theta} dt = 2\pi \cos\beta$

全回転角は**動的位相**と**幾何学的位相**に分解される。： $\Delta = \Delta_d + \Delta_g = \frac{2\pi a}{b} + 2\pi \cos\beta$

まとめ

ホップ束は剛体回転を記述する基本言語であり、
標準接続が動的位相と幾何学的位相の分解を与える。