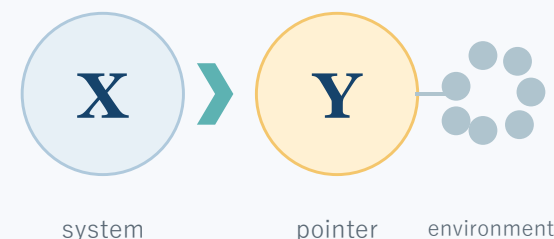


量子実時間発展の数値計算で探る観測問題

系 + フォンノイマン型測定装置 +
Caldeira-Leggett環境を「丸ごと」実時間発展



離散的手法による場と時空のダイナミクス2026
2026年9月7日(月)-9月11日(金)
理化学研究所 計算科学研究センター (神戸)

西村 淳 (KEK、総研大)

Tin-Long Chau(KEK、総研大) と
山森直幸(KEK→ 9月～国立臺灣大學・國家理論科學研究中心)
との共同研究に基づく

観測問題：ユニタリ時間発展と「波束の収縮」

“コペンハーゲン解釈”

閉じた量子系

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle$$

連続・決定論的・
ユニタリ時間発展



重ね合わせは、重ね合わせのまま

測定

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \longrightarrow |n\rangle$$

確率 $|c_n|^2$ で、ある固有状態に飛ぶ
瞬間的な非ユニタリ時間発展



「波束の収縮」を公理的に導入

全体系をユニタリ時間発展で記述すると、「Schrödingerの猫」の状態に。
環境との量子もつれ→ 再干渉が事実上不可能となり(デコヒーレンス)
実質的な確率分岐に。

目標：全体系の第一原理計算で観測問題を理解する

対象(X) + ポインター(Y) + 環境(E) の全体系を追跡

「測定ができた」と言うために、次の3つが必要

① X-Y相関の形成

ポインター Y から
対象 X を読み出せる

② デコヒーレンス

異なる結果の間の
量子干渉が消える

③ 測定対象を乱さない

測定する物理量の
確率分布を変えない

波束の「収縮」を仮定するのではなく、
測定過程そのものを計算して何が見えるか？

結果：測定が可能な時間窓が存在。測定後の状態には「履歴」が残る。

A. デコヒーレンスが十分速く起こる

環境 E により再干渉が事実上困難に

B. 対象系が乱される前に測定を終える

$t_{\text{dec}} < t < t_{\text{dist}}$ という measurement window

但し、時間窓の存在するためには、全体系の量子性が抑制されることが必要

C. 測定結果で条件付けした状態は局在するが、有限の運動量を持つ

観測値 X_0 だけでなく、そこへ至る力学的情報も残る

**コペンハーゲン解釈よりも詳細な情報
但し、不確定性関係には抵触しない。**

目次

1 計算方法

Heisenberg 表示で巨大環境・長時間を可能に

2 模型

対象 X + pointer Y + Caldeira–Leggett 環境 E

3 測定成立の条件

相関形成・デコヒーレンス・back reaction の競争

4 測定後の状態

conditional state と波束の収縮

5 まとめと展望

第1章：計算方法

Heisenberg 表示で巨大環境・長時間を可能に



ガウス型モデルの計算方法：path integral は大規模化に不向き

ガウス型モデルの例として、Caldeira-Leggettモデル（X+E）を想定。

JN-Watanabe(PRL '25) :
実時間 path integral

$$D = 2N_t(1 + N_E)$$

N_E : 環境の調和振動子の数

全体系の複素鞍点を求めるため
D元一次連立方程式を解く

$$\text{cost} \sim O(D^3)$$

$N_E \uparrow$ かつ 長時間 $N_t \uparrow$ で急速に困難

今回必要なのは…

全体系の density matrix
の時間発展ではない



巨大環境 E をtrace outした後の
reduced density matrix

「必要な情報だけを時間発展させる」のが計算量削減の鍵

二次 Hamiltonian + Gaussian 初期状態 → Gaussian のまま時間発展

$$\hat{\mathbf{z}} = \left(\underbrace{\hat{X}, \hat{P}}_{\text{対象}}, \underbrace{\hat{q}_1, \hat{p}_1, \dots, \hat{q}_{N_E}, \hat{p}_{N_E}}_{\text{環境}} \right)^{\top}$$

Heisenberg eq.

$$\frac{d\hat{\mathbf{z}}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\mathbf{z}}(t)] = A \hat{\mathbf{z}}(t)$$



$$\hat{\mathbf{z}}(t) = e^{At} \hat{\mathbf{z}}(0)$$

$$\begin{aligned} e_X^{\top} &= (1, 0, 0, \dots, 0) & e_P^{\top} &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ \hat{X}(t) &= e_X^{\top} \hat{\mathbf{z}}(t) & \hat{P}(t) &= e_P^{\top} \hat{\mathbf{z}}(t) \\ &= \underbrace{e_X^{\top} e^{At}}_{u(t)} \hat{\mathbf{z}}(0) & &= \underbrace{e_P^{\top} e^{At}}_{v(t)} \hat{\mathbf{z}}(0) \end{aligned}$$

$$\frac{du(t)}{dt} = u(t) A,$$

$$u(0) = e_X^{\top},$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = v(t) A$$

$$v(0) = e_P^{\top}$$

$$\text{cost} \sim O(r n N_E)$$

- r は、注目する変数の数。 $r=2$
- n は、Runge-Kutta 法で解く際の時間刻み数
- A は sparse $\rightarrow$ 1 step の積 uA, vA は $O(N_E)$

2×2 covariance matrix から reduced density matrix を再構成 構成

Step 1

covariance matrix

$$\Sigma_{ij}(t) \equiv \frac{1}{2} \langle \hat{z}_i(t) \hat{z}_j(t) + \hat{z}_j(t) \hat{z}_i(t) \rangle$$

必要なのは以下の3成分だけ

$$\Sigma_{XX}(t) = \mathbf{u}(t) \Sigma(0) \mathbf{u}(t)^\top,$$

$$\Sigma_{XP}(t) = \mathbf{u}(t) \Sigma(0) \mathbf{v}(t)^\top,$$

$$\Sigma_{PP}(t) = \mathbf{v}(t) \Sigma(0) \mathbf{v}(t)^\top.$$

Step 2

Wigner function

$$W(X, P; t) \sim \exp \left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} X & P \end{pmatrix} \tilde{\Sigma}^{-1}(t) \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} \right],$$

$$\tilde{\Sigma}(t) = \begin{pmatrix} \Sigma_{XX}(t) & \Sigma_{XP}(t) \\ \Sigma_{XP}(t) & \Sigma_{PP}(t) \end{pmatrix}.$$



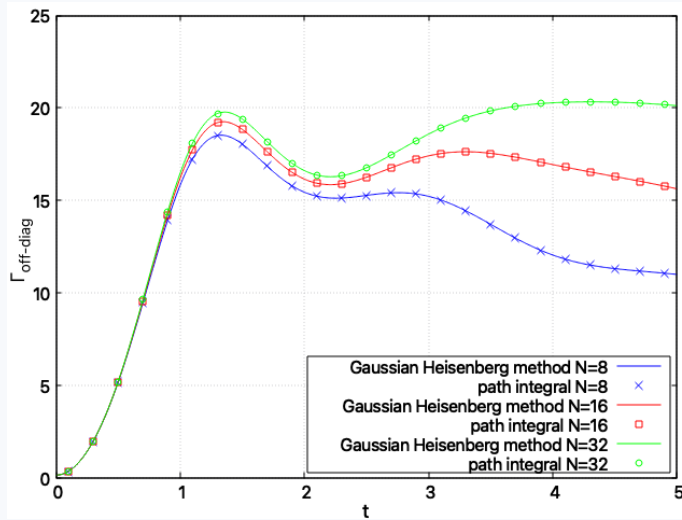
reduced density matrix

$$\begin{aligned} \rho_X(Y, \tilde{Y}; t) &= \int dP e^{iP(Y-\tilde{Y})} W\left(\frac{Y+\tilde{Y}}{2}, P; t\right) \\ &\sim \exp \left[-\frac{1}{2} \Gamma_{\text{off-diag}}(t) \left(\frac{Y-\tilde{Y}}{2} \right)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\Gamma_{\text{off-diag}}(t) = 4 \left(\Sigma_{PP}(t) - \frac{\Sigma_{XP}^2(t)}{\Sigma_{XX}(t)} \right)$$

全体系の density matrix を時間発展させる必要がない

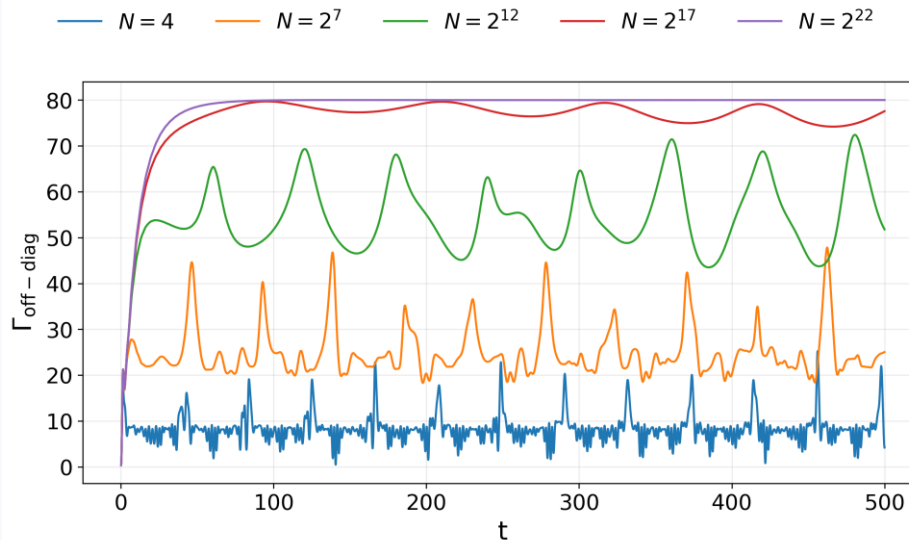
小さな N_E, t では path integral と一致し そのまま大きい N_E, t へ拡張できる



validation

 $N_E = 8, 16, 32$
 $t = 5$ まで

$\Gamma_{\text{off-diag}}$ の時間発展が、経路積分の結果 (JN-Watanabe, PRL '25) と完全に一致



extention

同じ計算法で

約420万

 $N_E = 4, 2^7, 2^{12}, 2^{17}, 2^{22}$
 $t = 500$ まで

熱平衡での値 80 に漸近

第2章：模型

対象 X + pointer Y + Caldeira–Leggett 環境 E



観測問題を「全体系の実時間発展」から見る

- 通常のコペンハーゲン解釈では、時間発展はユニタリだが、測定では波束の収縮（非ユニタリ発展）を仮定する。
- そこで我々は、「対象系 X + 測定装置 Y + 環境 E 」を一つの量子系として扱い、全自由度をユニタリ実時間発展させる。
- 問い：波束の収縮という現象は、どのように再現・理解されるのか。収縮後の状態は、通常のコペンハーゲン解釈と同じなのか？

**目標：波束の収縮とコペンハーゲン解釈を超える情報を、
第一原理ダイナミクスから抽出・理解する**

モデル：測定対象 X ・ ポインタ Y ・ 巨大な環境 E



original Hamiltonian :

$$H = \frac{P_X^2}{2m_X} + \frac{1}{2}m_X\omega_X^2 X^2 + \frac{P_Y^2}{2m_Y} + \frac{1}{2}m_Y\Omega_Y^2 Y^2 + c_{vN}XP_Y$$

Caldeira-Leggett 環境 →

$$+ \sum_{k=1}^{N_E} \left[\frac{p_k^2}{2m_E} + \left[\frac{1}{2}m_E\omega_k^2 q_k^2 - c_E q_k Y \right] \right].$$

フォンノイマン結合

completing the squares :

$$H = \frac{P_X^2}{2m_X} + \frac{1}{2}m_X\omega_X^2 X^2 + \frac{P_Y^2}{2m_Y} + \frac{1}{2}m_Y\omega_Y^2 Y^2 + c_{vN}XP_Y$$

$$+ \sum_{k=1}^{N_E} \left[\frac{p_k^2}{2m_E} + \frac{1}{2}m_E\omega_k^2 \left(q_k - \frac{c_E}{m_E\omega_k^2} Y \right)^2 \right].$$

renormalized frequency :

$$\omega_Y^2 \equiv \Omega_Y^2 - \frac{1}{m_Y} \sum_{k=1}^{N_E} \frac{c_E^2}{m_E\omega_k^2}.$$

理想的な測定を可能にする rescaling

Lagrangian:
$$L = \frac{1}{2}m_X \dot{X}^2 - \frac{1}{2}m_X \omega_X^2 X^2 + \frac{1}{2}m_Y (\dot{Y} - c_{\text{vn}} X)^2 - \frac{1}{2}m_Y \omega_Y^2 Y^2$$

$$+ \sum_{k=1}^{N_E} \left[\frac{1}{2}m_E \dot{q}_k^2 - \frac{1}{2}m_E \omega_k^2 \left(q_k - \frac{c_E}{m_E \omega_k^2} Y \right)^2 \right].$$

rescaling:
$$m_X \mapsto \frac{m_X}{\epsilon}, \quad m_Y \mapsto \frac{m_Y}{\epsilon}, \quad m_E \mapsto \frac{m_E}{\epsilon},$$

$$\omega_X \mapsto \omega_X, \quad \omega_Y \mapsto \omega_Y, \quad \omega_k \mapsto \omega_k,$$

$$c_{\text{vn}} \mapsto c_{\text{vn}}, \quad c_E \mapsto \frac{c_E}{\epsilon}.$$

パラメータ設定: $m_X = 1.0, \quad m_Y = 1.0, \quad m_E = 1.0,$

$$\omega_X = 1.0, \quad \omega_Y = 1.0, \quad \omega_{\text{cut}} = 16,$$

$$c_{\text{vn}} = 1.0, \quad \gamma = 0.1, \quad T = 20.0,$$

$$N_E = 2^{17}$$

環境との相互作用

$$c^2 \sim \frac{4 \omega_{\text{cut}}^3}{3\pi N_E} \gamma$$

対象系の初期状態(t=0)をガウス波束にとる $\sigma_X(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathcal{O}(\epsilon^0)$

ϵ を導入した rescaling により、初期ガウス幅を保ったまま “量子ゆらぎ” を制御

第3章：測定成立の条件

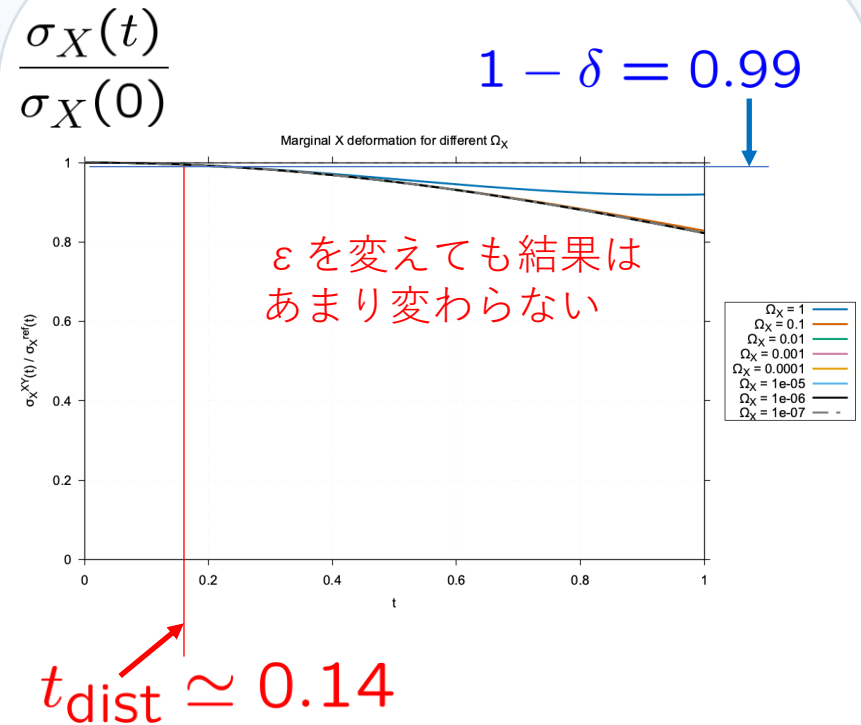
相関・デコヒーレンス・back reaction の競争を見る



測定は、測定対象を乱さない範囲内で行う

- X の確率分布が、フォンノイマン結合によって大きく変化する前に測定を終了する。
- この最大測定時間 t_{dist} は、量子効果制御パラメタ ε にほとんど依らない。

理想的な測定
 相関を作る必要はあるが、
 測定対象を乱してはいけない



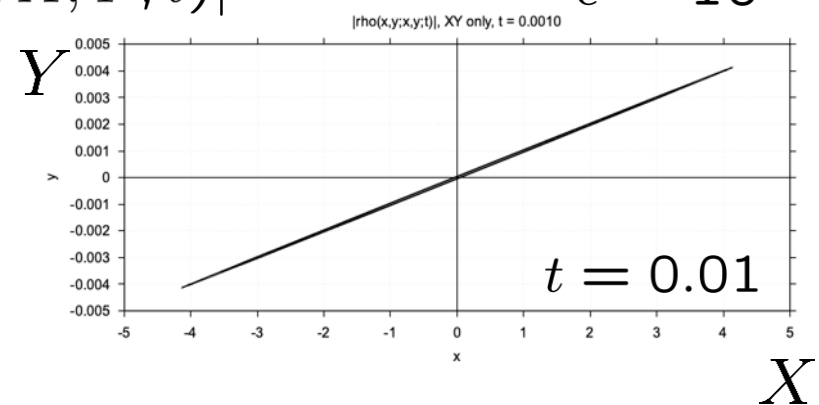
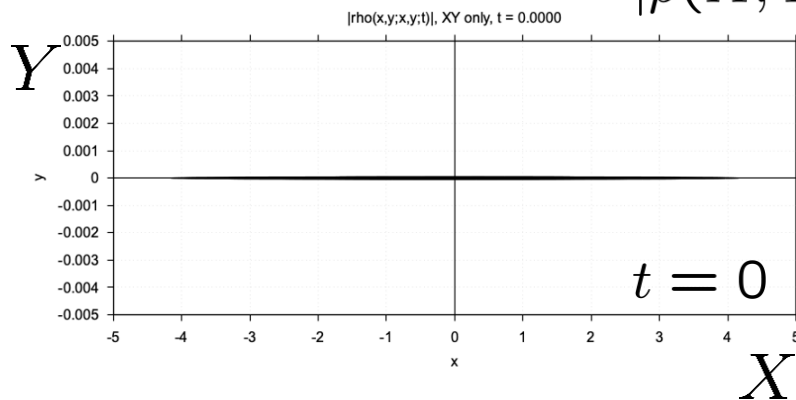
(ここでは環境は導入していない)

X の分布: Y と結合した場合／しない場合の比較

測定相関の形成：XとYの間の量子もつれ

環境 E をトレースアウトした reduced density matrix : $\rho(X, Y; \tilde{X}, \tilde{Y}; t)$

$$|\rho(X, Y; X, Y; t)| \quad \epsilon = 10^{-10}$$



時間が経過するにつれ、YがXの値に応じて変化していく

XとYの間に強い相関（量子もつれ）が形成される

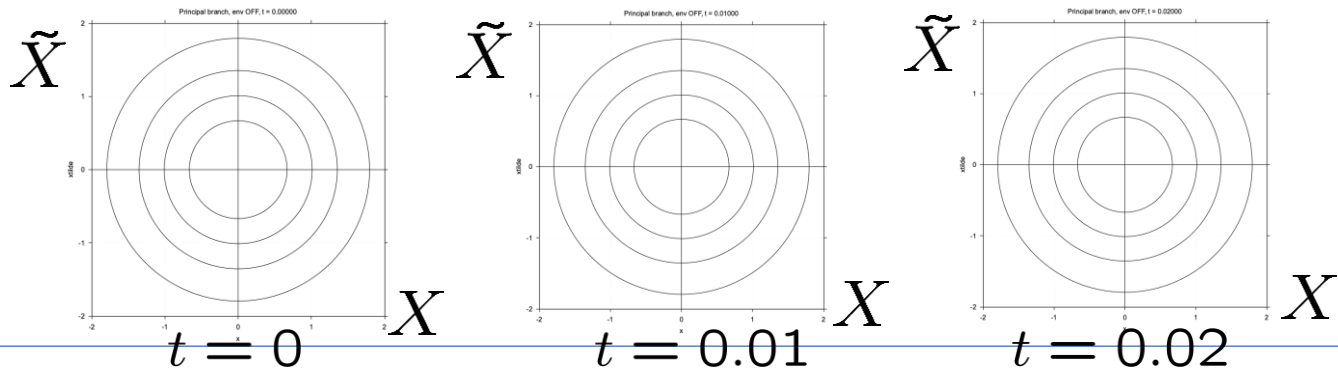
$$Y = f(X; t) \quad (\text{ここでは環境は導入していない})$$

pointer Y の値から、X の値が読み出せるようになる

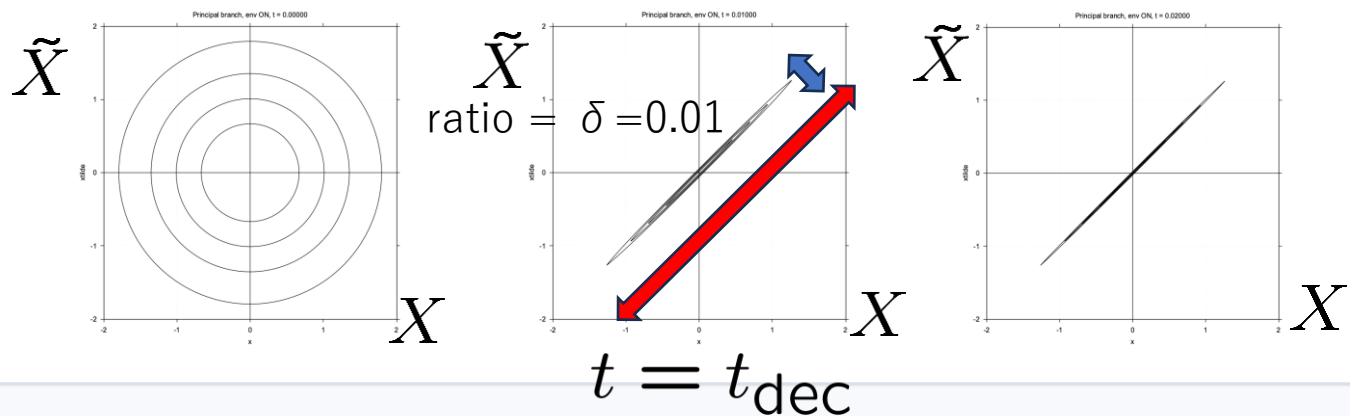
環境の役割：再干渉を事実上不可能にし、実質的な確率分岐を引き起こす

$$|\rho(X, f(X; t); \tilde{X}, f(\tilde{X}; t); t)| \quad \epsilon = 10^{-10}$$

環境無し



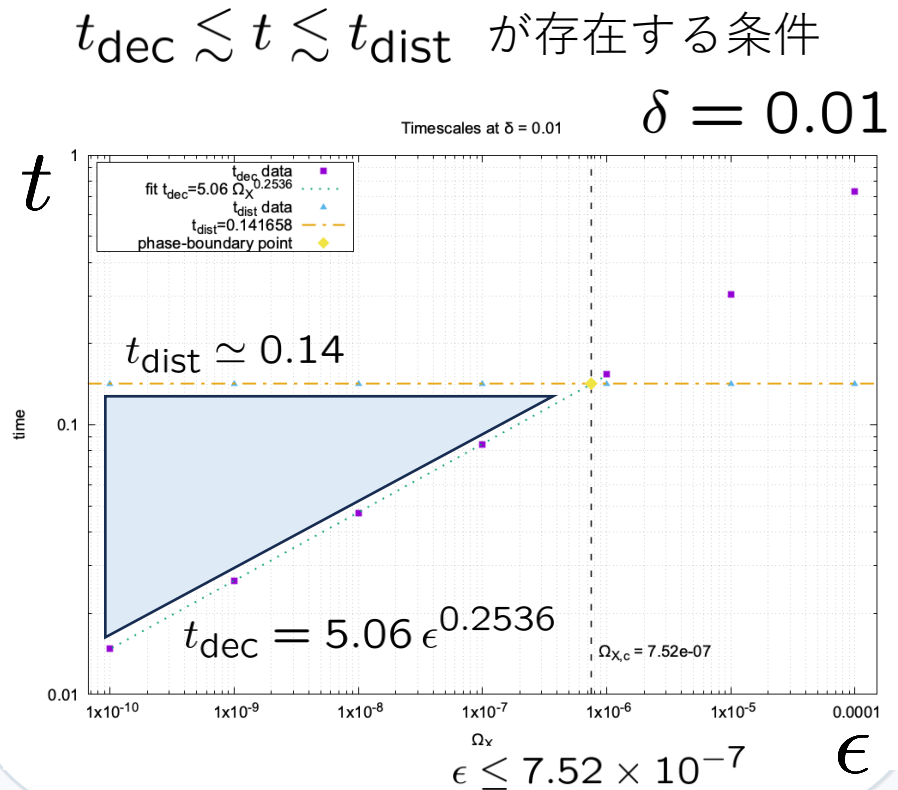
環境有り
 $\gamma = 0.1$



非対角方向と対角方向の幅の比が $\delta = 0.01$ となる時間を t_{dec} とする。
デコヒーレンスに最低必要な時間。

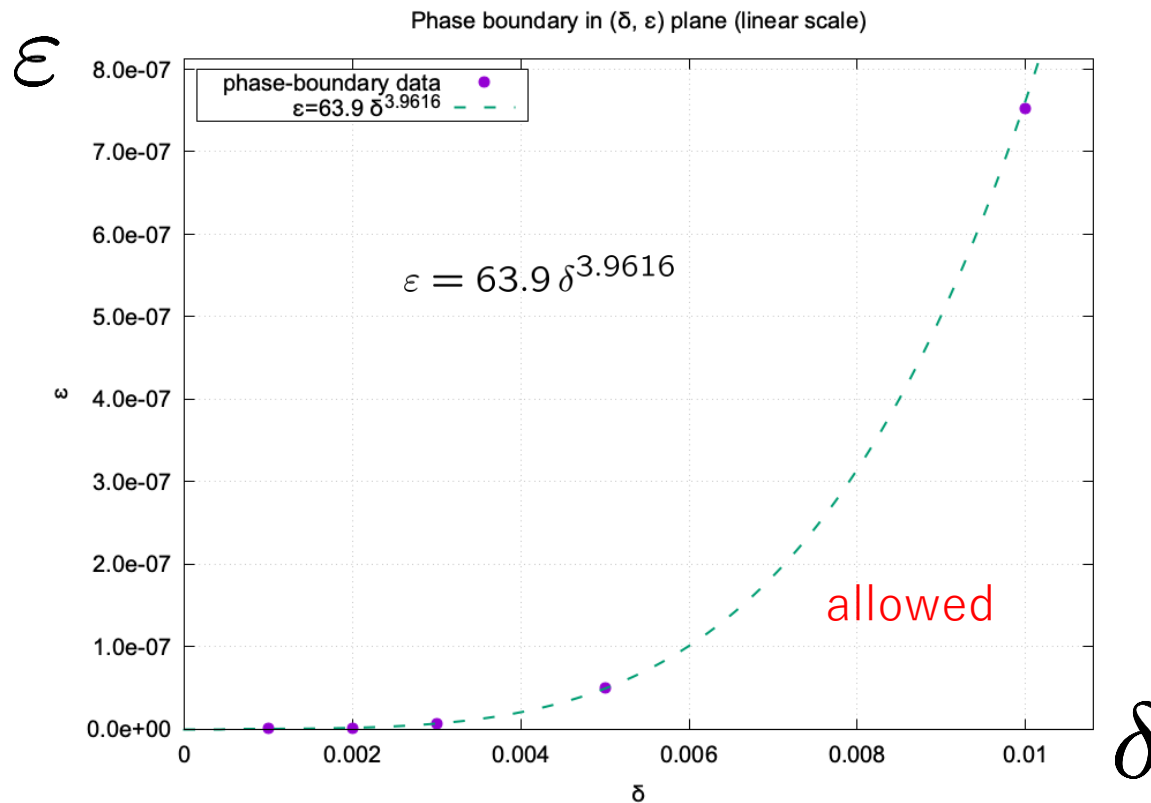
測定ができる時間領域

- 短すぎる：環境によるデコヒーレンスが不十分。
- 長すぎる：測定により、 X の確率分布が変わる。
- その間に時間領域が存在するための ϵ に対する条件



量子ゆらぎ制御パラメータ ϵ を十分小さくとる必要がある

完全に理想的な測定には古典極限が必要



有限な ϵ では、完全に理想的な測定はできない

第4章：測定後の状態

conditional state と波束の収縮を見る

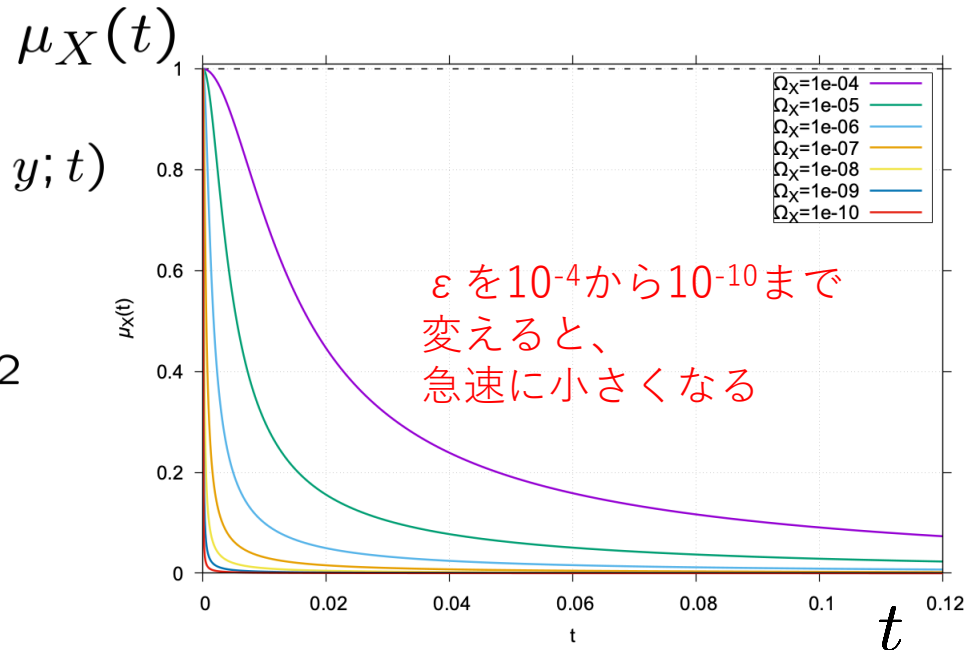


測定装置との量子もつれにより、混合状態へ

purity: $\mu \equiv \text{Tr}[\hat{\rho}^2]$ $\begin{cases} \mu = 1 & : \text{pure state,} \\ \mu < 1 & : \text{mixed state.} \end{cases}$

$$\rho_X(x, \tilde{x}; t) = \int dy \rho_{XY}(x, y; \tilde{x}, y; t)$$

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= \text{Tr}_X[\hat{\rho}_X^2(t)] \\ &= \int dx d\tilde{x} |\rho_X(x, \tilde{x}; t)|^2 \end{aligned}$$



purityは急速に小さくなり、純粋状態から混合状態へ。

測定装置の読み取りにより、混合状態から純粋状態へ

時刻 t に測定値 Y_0 を得たとする。

$$\rho_X(x, \tilde{x}; t) \rightarrow \rho_{X|Y=Y_0}(x, \tilde{x}; t)$$

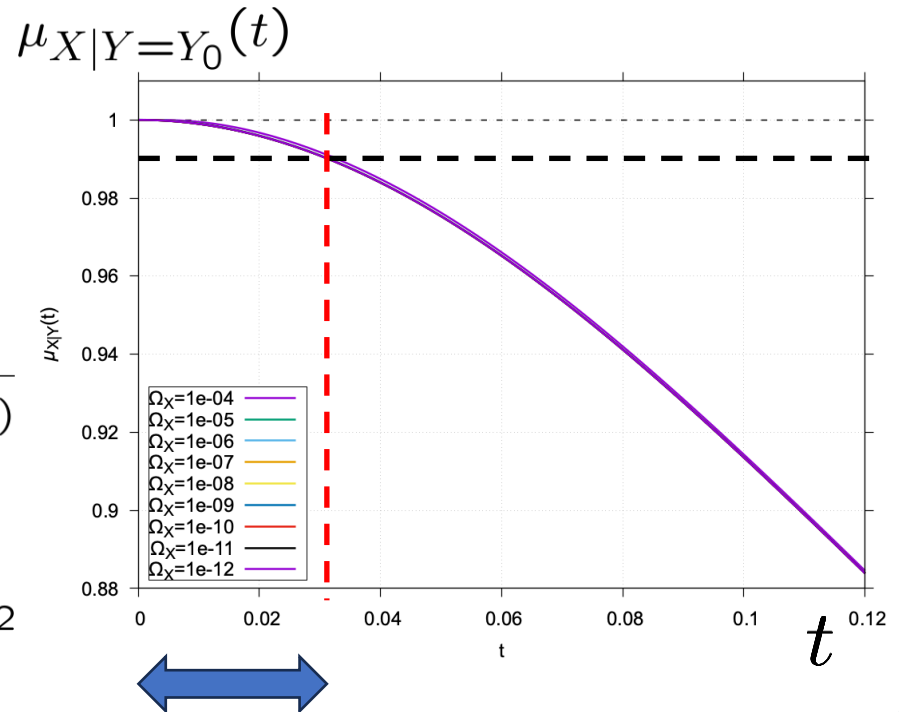
$$Y_0(t) = f(X_0; t)$$

Below we use $X_0 = 1$

conditional density matrix:

$$\rho_{X|Y=Y_0}(x, \tilde{x}; t) = \frac{\rho_{XY}(x, Y_0; \tilde{x}, Y_0; t)}{\int dx' \rho_{XY}(x', Y_0; x', Y_0; t)}$$

$$\begin{aligned} \mu_{X|Y=Y_0}(t) &= \text{Tr}_X [\hat{\rho}_{X|Y=Y_0}^2(t)] \\ &= \int dx d\tilde{x} |\rho_{X|Y=Y_0}(x, \tilde{x}; t)|^2 \end{aligned}$$



この間に測定を終えた場合は、ほぼ純粋状態に遷移

測定終了後の波動関数の抽出

conditional state : $\rho(x, \tilde{x}; t) \equiv \rho_{XY}(x, Y_0; \tilde{x}, Y_0; t)$
almost pure state for $t < 0.03$

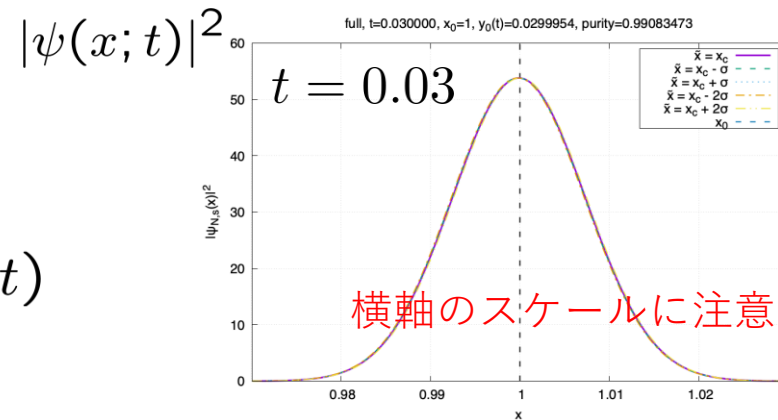
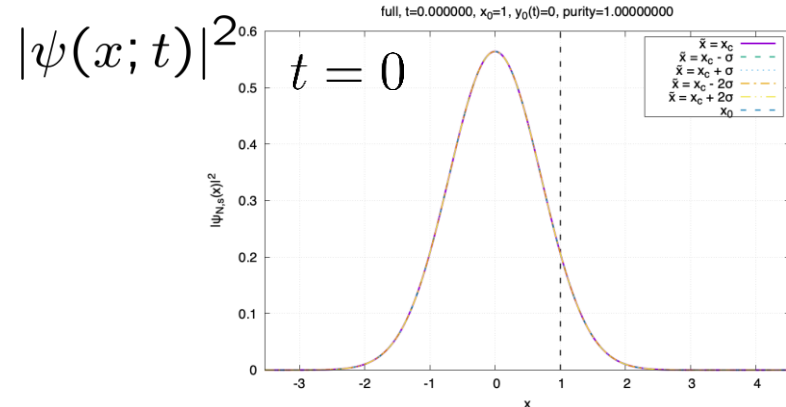
$$\rho(x, \tilde{x}; t) \simeq \psi(x; t) \psi^*(\tilde{x}; t)$$

$$\frac{\psi(x; t)}{\psi(0; t)} \simeq \frac{\rho(x, \tilde{x}; t)}{\rho(0, \tilde{x}; t)} \quad \text{indep. of } \tilde{x}$$



In what follows, we define :

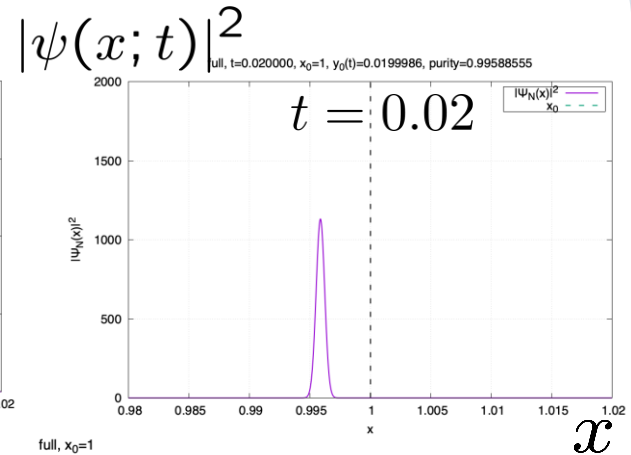
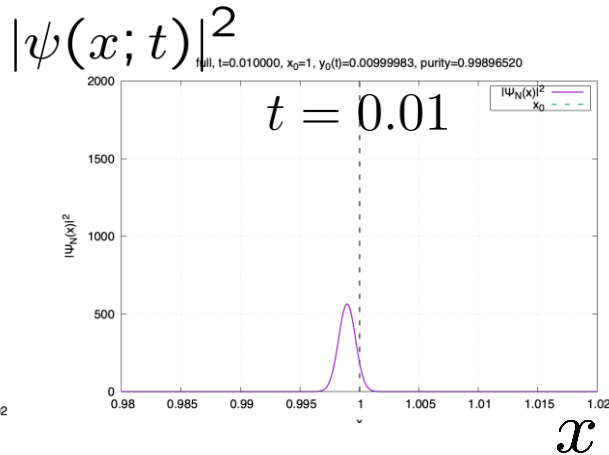
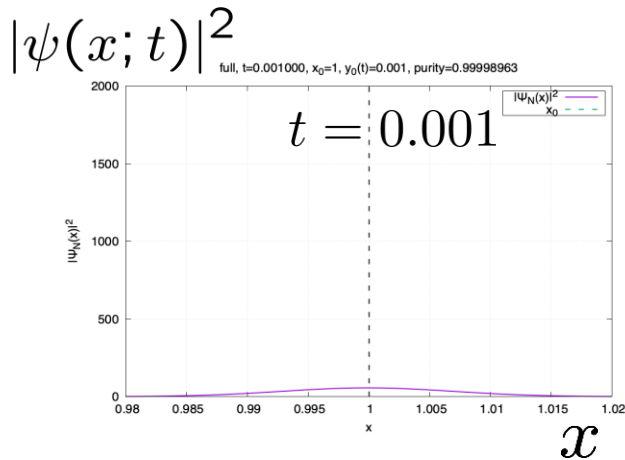
$$\psi(x; t) \propto \int d\tilde{x} \frac{\rho(x, \tilde{x}; t)}{\rho(0, \tilde{x}; t)} \rho(\tilde{x}, \tilde{x}; t)$$



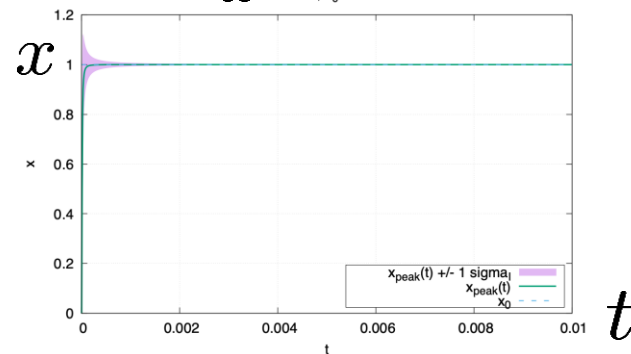
測定後の波束の収縮：確率分布が鋭くなる

$$\varepsilon = 10^{-10}$$

$$t_{\text{dec}} \simeq 0.01$$

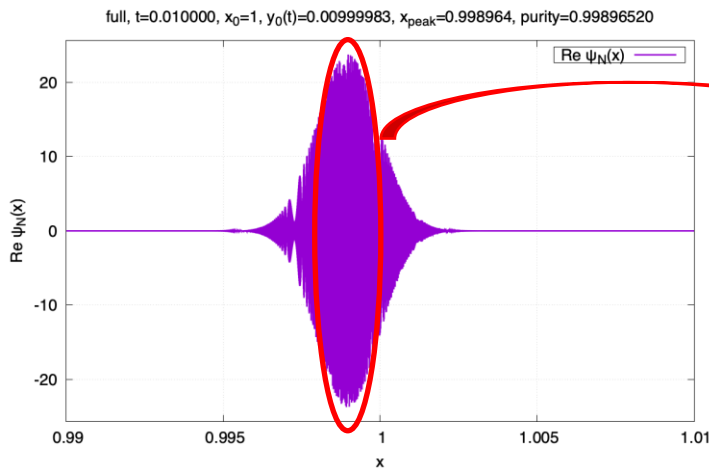


波束の中心と幅の時間依存性

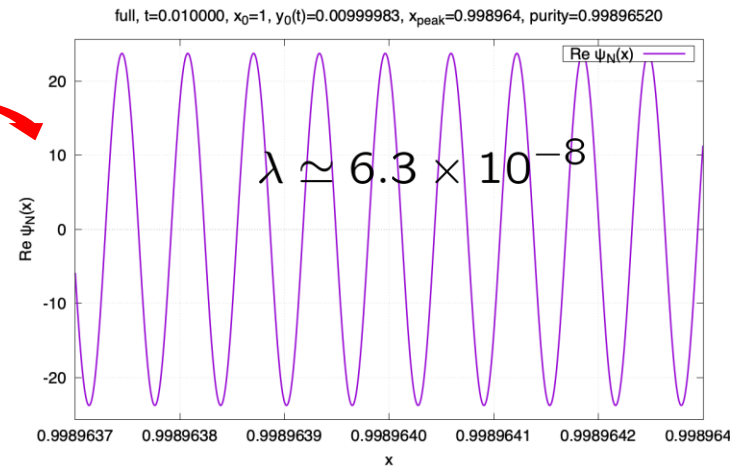


まず位置 x_0 への局在が起こる。しかし、実は運動量をもっている。(次頁)

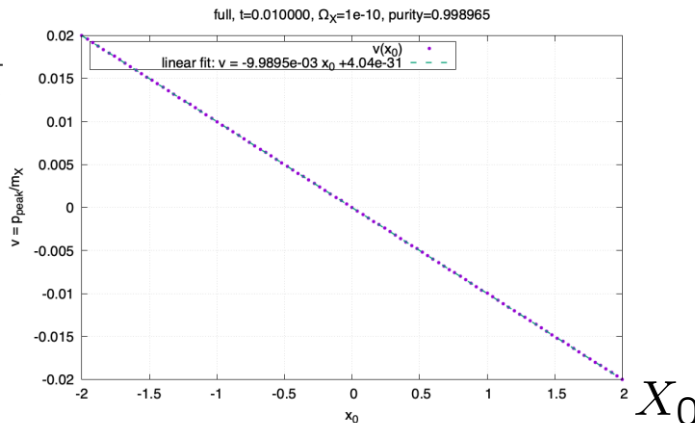
収縮後の状態には、観測値と 관련된 有限の運動量が残る

 $\text{Re } \psi(x, t)$ 

$$\varepsilon = 10^{-10}, \quad X_0 = 1.0, \quad t = 0.01$$



$$v = \frac{p}{m_X}$$



$$|p| = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \simeq \frac{2\pi}{6.3 \times 10^{-8}} = 10^8$$

$$v = \frac{p}{m_X} \sim \frac{-10^8}{10^{10}} = -0.01$$

$$F = -m_X \omega_X^2 X_0$$

$$v \simeq \frac{F}{m_X} t = -\omega_X^2 X_0 t (= -X_0 t)$$

$$\begin{matrix} X_0 = 1.0 \\ t = 0.01 \end{matrix}$$

コペンハーゲン解釈を越えた測定後の状態の詳細

射影測定（コペンハーゲンの記述）

位置 X を測定して $X=X_0$ を得る

$$|\psi\rangle \rightarrow |X_0\rangle$$

測定を公理として導入し、測定後、
状態を位置固有状態へ射影

第一原理ダイナミクスに基づく測定

X_0 に局在した波束

+

X_0 と関連した有限の運動量

$$\langle P_x \rangle \simeq -m_x \omega_x^2 X_0 t$$

測定後状態には、観測値 X_0 だけでなく
そこに至るまでの力学的履歴が残る。

- 初期状態に運動量 P_{init} を入れることも可能。
 $\langle P_x \rangle \simeq P_{init} - m_x \omega_x^2 X_0 t$ と予想。

微視的な測定過程には、コペンハーゲン解釈ではとらえられない情報が存在する。

第5章：まとめと展望



まとめ：観測問題を“計算できる問題”にする

- Gaussian + Heisenberg 表示により、巨大環境・長時間の実時間発展を効率よく計算できる。
- フォンノイマン型測定装置と Caldeira–Leggett 環境を含む全体系の量子実時間発展を数値的に追跡した。
- 測定相関の形成 → デコヒーレンス → 測定後の波束の収縮を、同じ微視的模型の中で統一的に記述した。
- ハイライト：収縮後の状態は X_0 に局在するだけでなく、 X_0 と相関した有限の運動量を持つ。 ε が小さいので、不確定性原理には抵触しない。
- $\varepsilon \rightarrow 0$ では $\langle P_x \rangle \simeq -m_x \omega_x^2 X_0 t$ と古典的に理解できる。コペンハーゲン解釈では捨てられる測定過程の力学的情報が、実際の測定後状態には残っている。

第一原理計算だからこそ、「波束の収縮」を導くだけでなく、コペンハーゲン解釈の背後にある測定ダイナミクスまで見えた。

展望：量子力学の実時間発展でやるべきこと

- 観測問題に関しては、今の標準的なモデルによって本質はとらえられている。これを徹底的に調べることで、完全な理解が得られるはず。
- Caldeira–Leggett 模型に関して、環境を構成する調和振動子のスペクトルがOhmicの場合については調べた (JN-Watanabe JHEP'25)。

super-Ohmic, sub-Ohmicの場合、Markov近似が破れるが、デコヒーレンスなどはどうなるか。大きな分子を用いた二重スリット実験の数値計算。

- 量子開放系のマスター方程式として知られるLindblad方程式の妥当性を検証可能。第一原理計算に基づく、Lindblad方程式の較正ができるか。
- 量子測定・量子制御など、量子技術に直結する実時間ダイナミクスへ応用

第一原理計算だからこそ見える、量子力学の新しい側面に光を当てたい。