

# エンタングルメントネガティビティの テンソルくりこみ群計算

田中豪太 (明治学院大)

共同研究者:

早崎貴大 (金沢大), 加堂大輔 (明治学院大), 武田真滋 (金沢大)

離散的手法による場と時空のダイナミクス 2026

2026 年 9 月 7 日, 理化学研究所 計算科学研究センター

# 量子もつれ

量子の間に生じる非局所的な相関

量子論の基礎的な現象であり、様々な分野で研究されている:

- 量子通信: 量子もつれを用いた情報のやりとり
- 量子計算: 量子もつれによる高速な計算アルゴリズム
- 量子相転移: 様々な相転移の臨界指数に
- 量子重力: 時空の幾何と量子もつれが関係

様々な指標が提案されている: エンタングルメントエントロピー、相互情報量、  
エンタングルメントネガティビティ etc.

# 量子もつれ

量子の間に生じる非局所的な相関

量子論の基礎的な現象であり、様々な分野で研究されている:

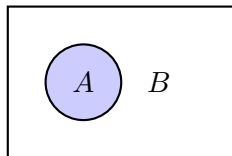
- 量子通信: エンタングルした状態を用いた情報のやりとり
- 量子計算: エンタングルメントを利用した高速な計算アルゴリズム
- 量子相転移: 様々な相転移の臨界指数に
- 量子重力: 時空の幾何とエンタングルメントが関係

様々な指標が提案されている: エンタングルメントエントロピー、相互情報量、  
エンタングルメントネガティビティ etc.

# エンタングルメントネガティビティ [Vidal-Werner, 2002]

- 量子系の部分系  $A, B$  の間の量子もつれを測る指標の一つ
- 部分系  $A \cup B$  の密度行列  $\hat{\rho}$  から定義される

$$\mathcal{N} = \frac{\|\hat{\rho}^{T_B}\| - 1}{2}$$



$T_B$ : 部分系  $B$  に関する添字の転置

$$\hat{\rho}_{IJ} = \hat{\rho}_{(I_A \textcolor{red}{I}_B)(J_A \textcolor{red}{J}_B)} = (\hat{\rho}^{T_B})_{(I_A \textcolor{red}{J}_B)(J_A \textcolor{red}{I}_B)}$$

$\|M\|$ : 行列  $M$  のトレースノルム (固有値の絶対値の和)

$$\|M\| = \sum_i |\lambda_i|$$

# ネガティビティの詳細

- Peres separability criterion:

部分系  $A$  と  $B$  がセパラブル (量子もつれなし)  $\Rightarrow \hat{\rho}^{T_B}$  の固有値は全て正

- ネガティビティはこの条件の破れの度合いを測る指標:

$$\mathcal{N} \equiv \frac{\|\hat{\rho}^{T_B}\| - 1}{2} = \frac{1}{2} \sum_i (|\lambda_i| - \lambda_i) = \sum_{\text{negative eigenvalues}} |\lambda_i|,$$

$A$  と  $B$  の間に量子もつれなし  $\Rightarrow \mathcal{N} = 0$

$\mathcal{N} > 0 \Rightarrow$  量子もつれあり

- 対数ネガティビティ  $E_{\mathcal{N}}$  もよく使われる:

$$E_{\mathcal{N}} \equiv \log \|\hat{\rho}^{T_B}\| = \log(2\mathcal{N} + 1)$$

## vs エンタングルメントエントロピー $S_A = -\text{tr} \rho_A \log \rho_A$

ネガティビティは混合状態でも量子もつれだけを捉えられる

例: 2つのスピン  $A$  と  $B$  の間の量子もつれ

case 1: 量子もつれのある純粋状態  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|,$$

$$S_A = S_B = \log 2, \quad \mathcal{N} = \frac{1}{2}$$

エントロピー、ネガティビティともに量子もつれを正しく検出している

## vs エンタングルメントエントロピー $S_A = -\text{tr} \rho_A \log \rho_A$

ネガティビティは混合状態でも量子もつれだけを捉えられる

例: 2つのスピン  $A$  と  $B$  の間の量子もつれ

case 2: 量子もつれのない混合状態  $\hat{\rho} = \frac{1}{2} |00\rangle \langle 00| + \frac{1}{2} |11\rangle \langle 11|$

$$S_A = S_B = \log 2, \quad \mathcal{N} = 0$$

エントロピーは古典的な相関を検出してしまう一方、  
ネガティビティは量子もつれがないことを示唆

# この研究の動機

エンタングルメントネガティビティを通じて有限温度相転移を解析したい

- エンタングルメントエントロピーは相転移点上で特異性を示し  
量子相転移の指標となる [Vidal-Latorre-Rico-Kitaev, 2004][Calabrese-Cardy, 2009]
- エンタングルメントネガティビティも有限温度相転移の指標となりうる  
[Lu-Grover, 2019][Wu-Lu-Chung-Kao-Grover, 2020]

これを実現するためには、ネガティビティの計算手法が必要



# ネガティビティの計算手法

- 解析的な計算

- 共形場理論 [Calabrese et al., 2013][Calabrese et al., 2014]
- 3 次元 quantum spherical model [Wald et al., 2020]

- 数値計算 (モンテカルロ法)

- 2 次元横磁場イジング模型 [Wu et al., 2019]
- 3 次元 Heisenberg 反強磁性体 [Liu et al., 2026]

モンテカルロ法はネガティビティを直接計算する代わりに  
レプリカトリックで定義される Rényi ネガティビティを計算する必要がある

# 本研究の目的

テンソルくりこみ群によるネガティビティの直接計算手法を確立する

テンソルくりこみ群 (TRG):

計算対象をテンソル積 (テンソルネットワーク) で表現し、ネットワークの粗視化を通じて計算する手法

## 0. 導入

### 1. テンソルくりこみ群による対数ネガティビティの計算手法

### 2. 1次元横磁場量子イジング模型での計算結果

### 3. まとめ

## 0. 導入

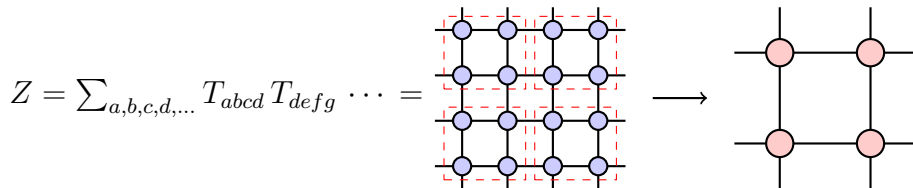
### 1. テンソルくりこみ群による対数ネガティビティの計算手法

### 2. 1次元横磁場量子イジングモデルでの計算結果

### 3. まとめ

# テンソルくりこみ群 (TRG) [Levin-Nave, 2006]

- 対象を局所的なテンソルの積 (テンソルネットワーク) で表現しネットワークの粗視化を通じて計算する手法



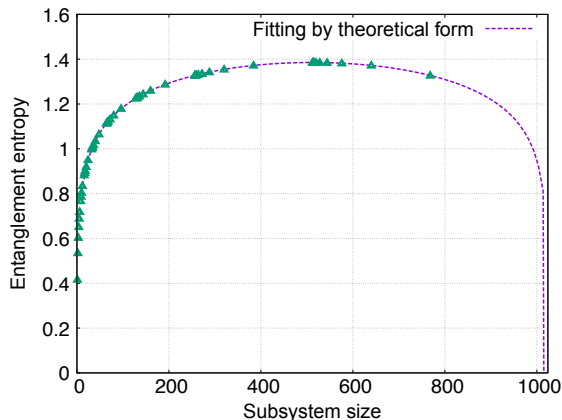
cf. 9 日水曜日の中山さん, 藤堂さんのトーク

# テンソルくりこみ群の利点

- 密度行列を直接扱える  
レプリカトリックを用いずにエンタングルメントエントロピーや  
ネガティビティやを直接計算できる
- 巨大体積を実現可能
- 符号問題がなく、有限密度系や  $\theta$  項のある系にも適用可能

# テンソルくりこみ群による量子もつれの数値計算

エンタングルメントエントロピーは TRG で計算可能 [Hayazaki-Kadoh-Takeda-GT, 2026]



- 2次元古典イジング模型の臨界点における部分系長さ依存性を解析
- CFT による解析解を再現

この計算に用いた手法をネガティビティの計算に応用する

# 計算の対象

- Gibbs state の対数ネガティビティ  $E_{\mathcal{N}}$  を計算する

$$E_{\mathcal{N}} = \log \|\hat{\rho}^{T_B}\|, \quad \hat{\rho} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Z}, \quad Z = \text{tr} e^{-\beta \hat{H}}$$

$\|\hat{\rho}^{T_B}\|$ : 部分系  $B$  に関する添字を転置した密度行列のトレースノルム

$\beta$ : 逆温度

- モデルは 1 次元横磁場イジング模型とする

$$\hat{H} = -J \sum_{i=1}^L \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_{i+1}^z - h_x \sum_{i=1}^L \hat{\sigma}_i^x$$

長さ  $L$  で周期境界条件を課す



# 密度行列のテンソルネットワーク表示

- テンソルくりこみ群計算のため密度行列  $\hat{\rho}$  をテンソルネットワークで表現したい

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Z},$$
$$\hat{H} = -J \sum_{i=1}^L \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_{i+1}^z - h_x \sum_{i=1}^L \hat{\sigma}_i^x$$

- Suzuki-Trotter 分解を用いて、密度行列を古典系に対応させる

$$e^{-\beta \hat{H}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{\beta J}{N} \sum_i \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_{i+1}^z} e^{\frac{\beta h_x}{N} \sum_i \hat{\sigma}_i^x} \right)^N$$

# 密度行列の Suzuki-Trotter 分解

- 次の成分表示を考える:

$$\langle s_{1,t} | \langle s_{2,t} | \dots \langle s_{L,t} | e^{-\beta \hat{H}} | s_{1,0} \rangle | s_{2,0} \rangle \dots | s_{L,0} \rangle$$

ここで、 $|s_{i,a}\rangle$  はパウリ行列  $\hat{\sigma}_i^z$  の固有ベクトルで

$$\hat{\sigma}_i^z |s_{i,a}\rangle = s_{i,a} |s_{i,a}\rangle, \quad s_{i,a} = \pm 1$$

を満たす。以降は  $|s_{1,a}\rangle |s_{2,a}\rangle \dots |s_{L,a}\rangle = |\{s\}_a\rangle$  と書く。

- Suzuki-Trotter 分解:

$$\langle \{s\}_t | e^{-\beta \hat{H}} | \{s\}_0 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \{s\}_t \left| \left( e^{\frac{\beta J}{N} \sum_i \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_{i+1}^z} e^{\frac{\beta h_x}{N} \sum_i \hat{\sigma}_i^x} \right)^N \right| \{s\}_0 \right\rangle$$

# 密度行列の Suzuki-Trotter 分解

- $N - 1$  個の完全系  $1 = \sum_{\{s\}_i} |\{s\}_i\rangle \langle \{s\}_i|$  ( $i = 1, 2, \dots, N - 1$ ) を積の間に挿入する:

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \{s\}_t \left| \left( e^{\frac{\beta J}{N} \sum_i \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_{i+1}^z} e^{\frac{\beta h_x}{N} \sum_i \hat{\sigma}_i^x} \right)^N \right| \{s\}_0 \right\rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\{s\}_1, \{s\}_2, \dots, \{s\}_{N-1}} \prod_{a=0}^{N-1} \left\langle \{s\}_{a+1} \left| e^{\frac{\beta J}{N} \sum_i \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_{i+1}^z} e^{\frac{\beta h_x}{N} \sum_i \hat{\sigma}_i^x} \right| \{s\}_a \right\rangle \end{aligned}$$

ここで、 $\{s\}_a = \{s_{1,a}, s_{2,a}, \dots, s_{L,a}\}$

# Trotter スライスの評価

- 完全系の挿入で得られた中間的な行列要素

$$\left\langle \{s\}_{a+1} \left| e^{\frac{\beta J}{N} \sum_i \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_{i+1}^z} e^{\frac{\beta h_x}{N} \sum_i \hat{\sigma}_i^x} \right| \{s\}_a \right\rangle$$

- もう一度完全系  $1 = \sum_{\{s\}}$  を挿入して  $\hat{\sigma}_x$  を処理する

$$\sum_{\{s\}} \left\langle \{s\}_{a+1} \left| e^{\frac{\beta J}{N} \sum_i \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_{i+1}^z} \right| \{s\} \right\rangle \left\langle \{s\} \left| e^{\frac{\beta h_x}{N} \sum_i \hat{\sigma}_i^x} \right| \{s\}_a \right\rangle$$

次の関係式が使える:

$$\left\langle s_i \left| e^{\frac{\beta h_x}{N} \hat{\sigma}_i^x} \right| s'_i \right\rangle = \left\{ \frac{1}{2} \sinh \left( \frac{2\beta h_x}{N} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \exp \left[ \frac{1}{2} s_i s'_i \log \left( \coth \frac{\beta h_x}{N} \right) \right],$$

# Trotter スライスの評価

## ■ 最終的な表式

$$\begin{aligned} & \left\langle \{s\}_{a+1} \left| e^{\frac{\beta J}{N} \sum_i \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_{i+1}^z} e^{\frac{\beta h_x}{N} \sum_i \hat{\sigma}_i^x} \right| \{s\}_a \right\rangle \\ &= C^L \exp \left[ K_x \sum_{i=1}^L s_{i,a+1} s_{i+1,a+1} + K_\tau \sum_{i=1}^L s_{i,a} s_{i,a+1} \right], \end{aligned}$$

ただし、

$$K_x \equiv \frac{\beta J}{N},$$

$$K_\tau \equiv \frac{1}{2} \log \coth \frac{\beta h_x}{N},$$

$$C \equiv \sqrt{\frac{1}{2} \sinh \left( \frac{2\beta h_x}{N} \right)}.$$

- 中間的な行列要素を代入することで最終的な結果が得られる

$$\begin{aligned} & \langle \{s\}_t | e^{-\beta \hat{H}} | \{s\}_0 \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\{s\}_1, \{s\}_2, \dots, \{s\}_{N-1}} \prod_{a=0}^{N-1} \left\langle \{s\}_{a+1} \left| e^{\frac{\beta J}{N} \sum_i \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_{i+1}^z} e^{\frac{\beta h_x}{N} \sum_i \hat{\sigma}_i^x} \right| \{s\}_a \right\rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\{s\}_1, \dots, \{s\}_{N-1}} C^{LN} \exp \left[ K_x \sum_{a=1}^N \sum_{i=1}^L s_{i,a} s_{i+1,a} + K_\tau \sum_{a=0}^{N-1} \sum_{i=1}^L s_{i,a} s_{i,a+1} \right], \end{aligned}$$

ここで、 $s_{i,a} = \pm 1$ ,  $\{s\}_a = \{s_{1,a}, s_{2,a}, \dots, s_{L,a}\}$

# 古典系との対応

- 最終結果の指数部が 2 次元古典イジング模型のハミルトニアンに対応する

$$\begin{aligned} & \langle \{s\}_t | e^{-\beta \hat{H}} | \{s\}_0 \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\{s\}_1, \dots, \{s\}_{N-1}} C^{LN} \exp \left[ K_x \sum_{a=1}^N \sum_{i=1}^L s_{i,a} s_{i+1,a} + K_\tau \sum_{a=0}^{N-1} \sum_{i=1}^L s_{i,a} s_{i,a+1} \right]. \end{aligned}$$

赤字の部分が古典系の Boltzmann weight  $e^{-\beta_{\text{cl}} H_{\text{cl}}}$  に対応

## 対応する古典系の詳細

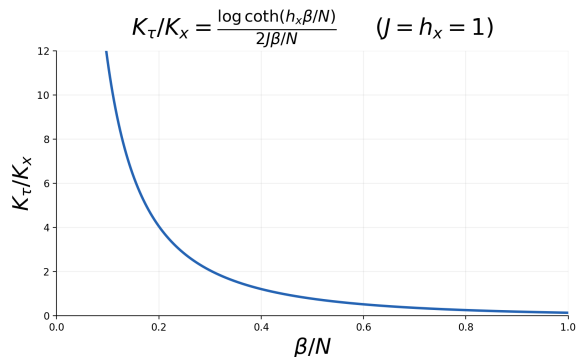
- 得られる古典系は非等方的な結合定数を持つ

$$e^{-\beta_{\text{cl}} H_{\text{cl}}} \sim \exp \left[ K_x \sum_{a=1}^N \sum_{i=1}^L s_{i,a} s_{i+1,a} + K_\tau \sum_{a=0}^{N-1} \sum_{i=1}^L s_{i,a} s_{i,a+1} \right],$$
$$K_x \equiv \frac{\beta J}{N},$$
$$K_\tau \equiv \frac{1}{2} \log \coth \frac{\beta h_x}{N},$$

量子系の温度  $\beta$ , パラメータ  $J, h_x$  が古典系の非等方性を決定する



# 古典系の非等方性



- Suzuki-Trotter 分解の連続極限  $N \rightarrow \infty$  で古典系の空間方向の結合定数は無視できるようになる
- 等方的な古典系に移ることもできるが Suzuki-Trotter 分解の誤差が残る

# テンソルネットワーク表示

- 2次元古典イジング模型の Boltzmann weight をテンソルネットワークで表現する

$$\sum_{\{s\}_1, \dots, \{s\}_{N-1}} \exp \left[ K_x \sum_{a=1}^N \sum_{i=1}^L s_{i,a} s_{i+1,a} + K_\tau \sum_{a=0}^{N-1} \sum_{i=1}^L s_{i,a} s_{i,a+1} \right].$$

サイトに関する  $a, i$  の和をサイト間のリンクに関する和に書き換えて実現

# 相互作用の書き換え

- リンク上の相互作用を両端のサイトに分配する

$$\begin{aligned} & \sum_{\{s\}_1, \dots, \{s\}_{N-1}} \exp \left[ K_x \sum_{a=1}^N \sum_{i=1}^L s_{i,a} s_{i+1,a} + K_\tau \sum_{a=0}^{N-1} \sum_{i=1}^L s_{i,a} s_{i,a+1} \right] \\ &= \sum_{\{s\}_1, \dots, \{s\}_{N-1}} \left( \prod_{a=1}^N \prod_{i=1}^L \sum_{x=0}^1 w_{s_{i,a},x} w_{s_{i+1,a},x} \right) \left( \prod_{a=0}^{N-1} \prod_{i=1}^L \sum_{t=0}^1 w'_{s_{i,a},t} w'_{s_{i,a+1},t} \right) \end{aligned}$$

ここで、

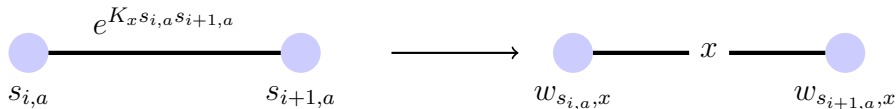
$$w_{s,x} = \begin{matrix} & x=0 & x=1 \\ \begin{matrix} s=-1 \\ s=+1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \sqrt{\cosh K_x} & \sqrt{\sinh K_x} \\ \sqrt{\cosh K_x} & -\sqrt{\sinh K_x} \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad w'_{s,t} = \begin{matrix} & t=0 & t=1 \\ \begin{matrix} s=-1 \\ s=+1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \sqrt{\cosh K_\tau} & \sqrt{\sinh K_\tau} \\ \sqrt{\cosh K_\tau} & -\sqrt{\sinh K_\tau} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

# 相互作用の書き換え

- 新たな変数  $x, t$  に関する和を挿入して相互作用を両端のサイトに押し付ける

$$\sum_{\{s\}_1, \dots, \{s\}_{N-1}} \exp \left[ K_x \sum_{a=1}^N \sum_{i=1}^L s_{i,a} s_{i+1,a} + K_\tau \sum_{a=0}^{N-1} \sum_{i=1}^L s_{i,a} s_{i,a+1} \right]$$

$$= \sum_{\{s\}_1, \dots, \{s\}_{N-1}} \left( \prod_{a=1}^N \prod_{i=1}^L \sum_{x=0}^1 w_{s_{i,a},x} w_{s_{i+1,a},x} \right) \left( \prod_{a=0}^{N-1} \prod_{i=1}^L \sum_{t=0}^1 w'_{s_{i,a},t} w'_{s_{i,a+1},t} \right)$$



- 1つのサイトには4つのリンクが集まる  
 $\Rightarrow$  1つのサイトに4階のテンソルが定義される

## 双直交基底への変換

- 元のスピン基底  $|s_i\rangle$  から双直交基底  $|u_{i,I}\rangle, \langle v_{i,I}|$  に変換する

$$|u_{i,0}\rangle = \frac{|1_i\rangle + |-1_i\rangle}{2\sqrt{\cosh K_\tau}},$$

$$|u_{i,1}\rangle = \frac{|1_i\rangle - |-1_i\rangle}{2\sqrt{\sinh K_\tau}},$$

$$\langle v_{i,0}| = \sqrt{\cosh K_\tau}(\langle 1_i| + \langle -1_i|),$$

$$\langle v_{i,1}| = \sqrt{\sinh K_\tau}(\langle 1_i| - \langle -1_i|).$$

$i = 1, 2, \dots, L$  はサイトのラベル

- $|u_{i,I}\rangle$  どうし、 $\langle v_{i,I}|$  どうしは直交しないが、 $\langle v_{i,I}|u_{j,J}\rangle = \delta_{ij}\delta_{IJ}$  が成立する

# 双直交基底

## ■ 行列 $w'_{s,I}$

$$w'_{s,I} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} I = 0 & I = 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} s = -1 \\ s = +1 \end{array} & \left( \begin{array}{cc} \sqrt{\cosh K_\tau} & \sqrt{\sinh K_\tau} \\ \sqrt{\cosh K_\tau} & -\sqrt{\sinh K_\tau} \end{array} \right) \end{array}$$

を用いて、

$$\begin{aligned} |u_{i,I}\rangle &= \sum_{s=\pm 1} (w'^{-1})_{I,s} \langle s_i|, \\ \langle v_{i,I}| &= \sum_{s=\pm 1} w'_{s,I} |s_i\rangle \end{aligned}$$

と書ける

- この変換はスピン自由度に対する局所的な変換であり  
元の部分系の構造を保持する

# 双直交基底による表示

## ■ 双直交基底による密度行列の成分表示

$$\langle \{v\}_{\{I\}} | e^{-\beta \hat{H}} | \{u\}_{\{J\}} \rangle = \sum_{\{s\}_0, \{s\}_t} \left( \prod_{i=1}^L w'^{-1}_{J_i s_{i,0}} \right) \left( \prod_{i=1}^L w'_{s_{i,t}, I_i} \right) \langle \{s\}_t | e^{-\beta \hat{H}} | \{s\}_0 \rangle$$

ここで、

$$\begin{aligned} |\{u\}\rangle_{\{J\}} &= |u_{1,J_1}\rangle |u_{2,J_2}\rangle \dots |u_{L,J_L}\rangle, \\ \langle \{v\} |_{\{I\}} &= \langle v_{1,I_1} | \langle v_{2,I_2} | \dots \langle v_{L,I_L} |, \\ \langle \{s\} |_a &= \langle s_{1,a} | \langle s_{2,a} | \dots \langle s_{L,a} | \end{aligned}$$

である

# 転送行列によるテンソルネットワーク表示

- これまでの結果を代入して次を得る

$$\begin{aligned}\langle \{v\}_I | e^{-\beta \hat{H}} | \{u\}_J \rangle &= \sum_{\{s\}_0, \{s\}_t} W'^{-1}_{\{J\}\{s\}_0} W'_{\{s\}_t\{I\}} \langle \{s\}_t | e^{-\beta \hat{H}} | \{s\}_0 \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{T}_{\{J\}\{t\}_1} \mathcal{T}_{\{t\}_1\{t\}_2} \times \cdots \times \mathcal{T}_{\{t\}_{N-1}\{I\}},\end{aligned}$$

- $\mathcal{T}_{\{t\}_a\{t\}_{a+1}}$  は転送行列:

$$\mathcal{T}_{\{t\}_a\{t\}_{a+1}} \equiv \sum_{x_1, \dots, x_L=0}^1 \prod_{i=1}^L T_{x_i x_{i+1} t_{i,a} t_{i,a+1}},$$

$$T_{x_1 x_2 t_1 t_2} \equiv C \sum_{s=\pm 1} w_{s,x_1} w_{s,x_2} w'_{s,t_1} w'_{s,t_2}$$

$$= 2C \delta(\text{mod}(x_1 + x_2 + t_1 + t_2, 2)) \cosh K_x \cosh K_\tau (\sqrt{\tanh K_x})^{x_1+x_2} (\sqrt{\tanh K_\tau})^{t_1+t_2}$$



# テンソルネットワークのダイアグラム表示

$$\langle \{v\}_I | e^{-\beta \hat{H}} | \{u\}_J \rangle =$$

The diagram illustrates a tensor network for the expectation value of the evolution operator  $e^{-\beta \hat{H}}$ . The vertical axis is labeled  $x$  and the horizontal axis is labeled  $\tau$ . The grid is divided into two parts, A and B, by a horizontal dashed line. The left side of the grid is labeled  $J_L, J_{L/2+1}, J_{L/2}, \dots, J_1$ . The right side is labeled  $I_L, I_{L/2+1}, I_{L/2}, \dots, I_1$ . A red dashed box highlights a vertical column of tensors, labeled  $T_{\{\tau\}_{N-1}\{I\}}$ . Blue curly braces on the right group the tensors into two sets, A and B.

- ネットワークの両端で虚時間方向に伸びるボン드가密度行列の添字に対応する
- ボンドの分割が部分系 A, B の分割に対応する

# テンソルネットワークの粗視化

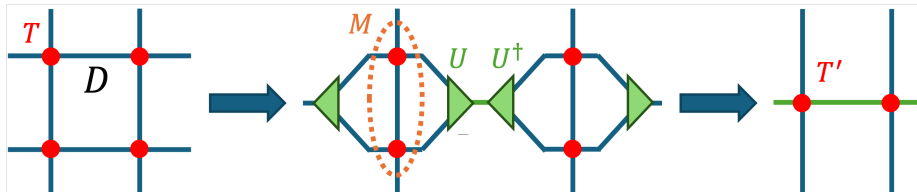
- ネットワークの縮約計算は指数的に計算量が増えるため、粗視化を通じて効率的に計算する
- さまざまな粗視化手法が提案されている
  - Tensor Renormalization Group (TRG) [Levin-Nave, 2006]  
オリジナルの 2 次元向けアルゴリズム
  - Tensor Network Renormalization [Evenbly-Vidal, 2014]  
2 次元向け、近距離の相関を処理するディスエンタングラーを導入し精度向上
  - Higher-Order TRG [Xie et al., 2012]  
3 次元以上の高次元にも適用可能
  - Triad TRG [Kadoh-Nakayama, 2019]  
ネットワークの表現法を改良し効率向上、3 次元以上の高次元にも適用可能

# テンソルネットワークの粗視化

- ネットワークの縮約計算は指数的に計算量が増えるため、粗視化を通じて効率的に計算する
- さまざまな粗視化手法が提案されている
  - Tensor Renormalization Group (TRG) [Levin-Nave, 2006]  
オリジナルの 2 次元向けアルゴリズム
  - Tensor Network Renormalization [Evenbly-Vidal, 2014]  
2 次元向け、近距離の相関を処理するディスエンタングラーを導入し精度向上
  - Higher-Order TRG [Xie et al., 2012]  
3 次元以上の高次元にも適用可能
  - Triad TRG [Kadoh-Nakayama, 2019]  
ネットワークの表現法を改良し効率向上、3 次元以上の高次元にも適用可能

## Higher-Order TRG algorithm [Xie et al., 2012]

- 2つの隣接するテンソルを結合し、特異値分解を通じて粗視化する

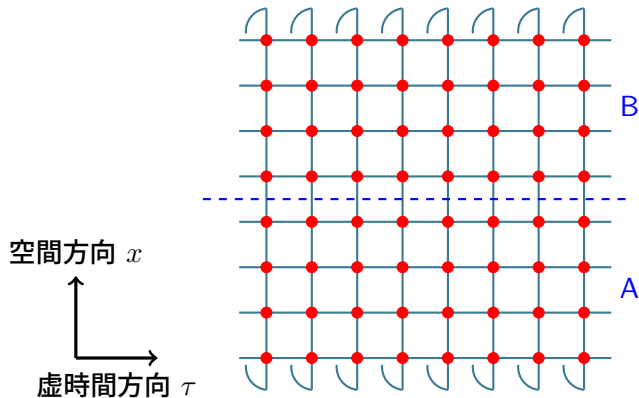


- アイソメトリ  $U$  は行列  $MM^\dagger$  を対角化し、 $MM^\dagger$  の特異値を大きなものから  $D(< D^2)$  個含む
- 同様の手順を全ての方向に対して繰り返し行い、ネットワーク全体を粗視化する
- テンソル添字の部分系構造を保持したまま粗視化できる

# 実際の粗視化の様子

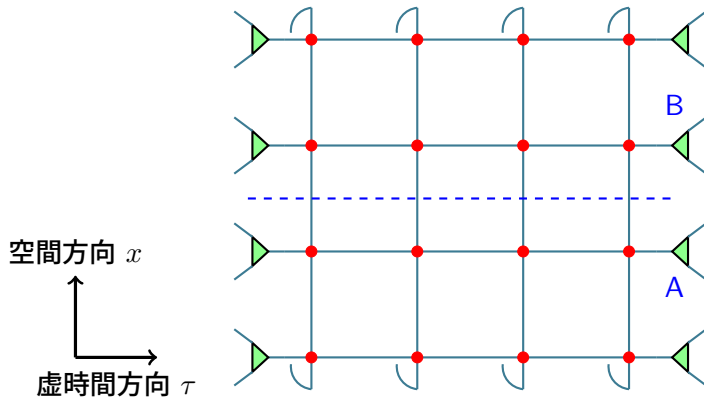
空間方向サイズ  $L = 8$ , 虚時間方向の Trotter スライス枚数  $N = 8$  の  
密度行列を表すネットワーク

部分系 A, B の大きさは  $|A| = 4, |B| = 4$



# 1 回目の粗視化

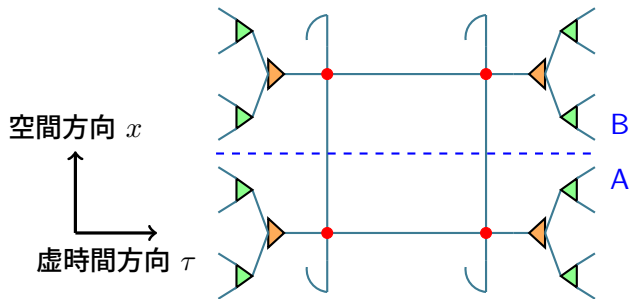
虚時間、空間方向のテンソルの数が半分になる



空間方向の両端には縮約されなかったアイソメトリが残る

## 2 回目の粗視化

虚時間、空間方向のテンソルの数がさらに半分になる



2 回目の空間方向粗視化に使われたアイソメトリもそのまま保持される

# テンソルの簡略化

残ったアイソメトリはネガティビティに寄与しないため省略可能  
アイソメトリを取り除いて残ったボンドが密度行列の添字になる

$$\tilde{\rho}_{(I_A I_B)(J_A J_B)} = \text{Diagram}$$

$\rho = \tilde{\rho} \times (\text{isometries})$  で、対数ネガティビティは  $\tilde{\rho}$  から計算できる

$$E_{\mathcal{N}} = \log \|\tilde{\rho}_{(I_A I_B)(J_A J_B)}^{T_B}\| = \log \|\tilde{\rho}_{(I_A J_B)(J_A I_B)}\|.$$



## ここまでのまとめ

- Suzuki-Trotter 分解を用いて、対数ネガティビティの計算に必要な密度行列をテンソルネットワークとして表現できる

$$E_{\mathcal{N}} = \log \|\rho^{T_B}\|.$$

- Higher-Order TRG により、テンソル添字の部分系構造を保ったままネットワークを粗視化できる
- 最終的な結果を得るには、Suzuki-Trotter 分解によるスライス数  $N$  と粗視化のボンド次元  $D$  無限大の外挿が必要

## 0. 導入

### 1. テンソルくりこみ群による対数ネガティビティの計算手法

### 2. 1次元横磁場量子イジング模型での計算結果

### 3. まとめ

# 計算結果

- 本研究では 1 次元横磁場イジング模型の Gibbs state における対数ネガティビティ  $E_{\mathcal{N}}$  を計算した

$$\hat{H} = -J \sum_{i=1}^L \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_{i+1}^z - h_x \sum_{i=1}^L \hat{\sigma}_i^x,$$

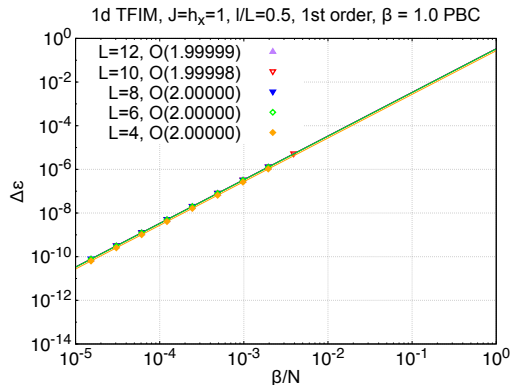
$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}},$$

$$E_{\mathcal{N}} = \log \|\rho^{T_B}\| = \log |\lambda_i|$$

- 部分系 A, B の大きさは  $|A| = |B| = L/2$  とした
- Trotter スライス数  $N$  とボンド次元  $D$  を変化させて計算を行い、その収束性を確認した

# Trotter スライス枚数 $N$ 依存性

小さな系なら TRG を使わずに対数ネガティビティを計算し  
ボンド次元  $D$  の誤差をのぞいた  $N$  依存性を計算できる



## ■ Suzuki-Trotter 分解による誤差を評価

$$\Delta \varepsilon = \log \|\hat{\rho}^{T_B}\| - \log \|\hat{\rho}_N^{T_B}\|$$

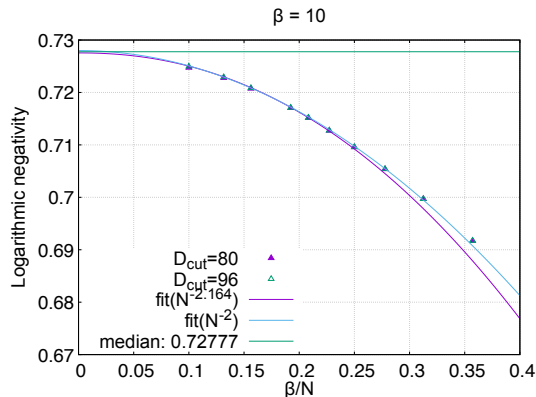
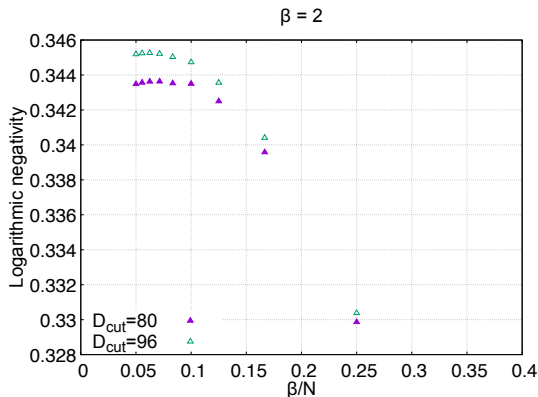
$$\hat{\rho}_N = \left( e^{\frac{\beta J}{N} \sum_i \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_{i+1}^z} e^{\frac{\beta h_x}{N} \sum_i \hat{\sigma}_i^x} \right)^N$$

- ある程度小さな  $\beta/N$  に対して  
 $O((\beta/N)^2)$  で収束が確認できた

対数ネガティビティを  $\beta/N$  の 2 次関数で fit し  $N \rightarrow \infty$  へ外挿できるはず

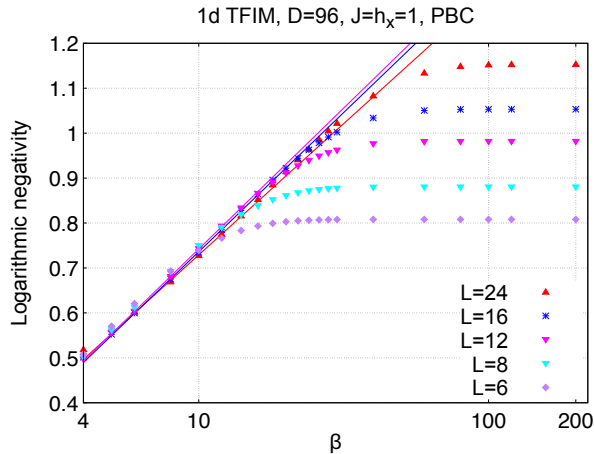
# ボンド次元依存性

1D TFIM,  $J = h_x = 1.0$ , 系サイズ  $L = 24$ , 周期境界条件



低温では  $D = 96$  で結果の収束が確認できた  
期待される  $O((\beta/N)^2)$  のスケーリングも確認できている

# 温度依存性



■ 低温では一定値に収束する

■ ローレンツ対称性による予想:

$$E_{\mathcal{N}} = \frac{c}{2} \log \beta + \text{const.},$$

$c$ : 理論の中心電荷

1次元横磁場イジング模型の場合

$$c = 0.5$$

■ フィット結果

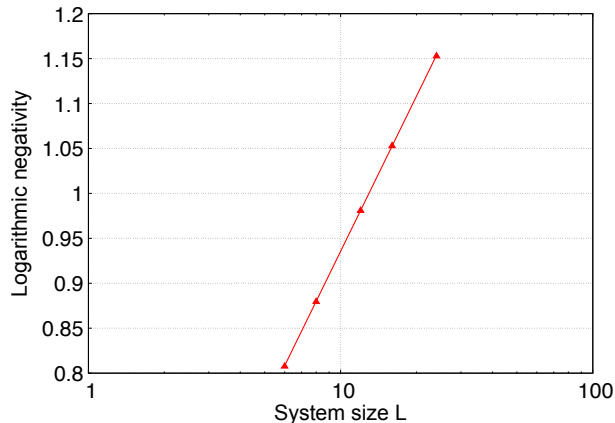
$$c = 0.507 \quad (L = 24)$$

$$c = 0.538 \quad (L = 16)$$

$$c = 0.545 \quad (L = 12)$$

# ゼロ温度極限

1d TFIM,  $J=h_x=1$ ,  $\beta = 200$ ,  $D=96$ , PBC



## ■ ゼロ温度での解析解:

[Calabrese et al., 2013]

$$E_{\mathcal{N}} = \frac{c}{2} \log L + \text{const.}$$

## ■ 中心電荷

$$c = 0.4983(9)$$

理論値  $c = 0.5$  を再現

## 0. 導入

### 1. テンソルくりこみ群による対数ネガティビティの計算手法

### 2. 1次元横磁場量子イジングモデルでの計算結果

## 3. まとめ



# まとめ

- テンソルくりこみ群による対数ネガティビティの数値計算手法を提案した
- 量子系の密度行列を Suzuki-Trotter 分解でテンソルネットワークに書き換え、HOTRG による粗視化を行う
- 1次元横磁場イジング模型の Gibbs state における対数ネガティビティを計算し、低温では CFT の予想と一致することを確認した
- 量子もつれの別な指標であるエンタングルメントエントロピーも同様の方法で計算可能

# 今後の方向性

## 今後の展望

- 場の量子論、特に有限温度における相転移の解析への応用
- 量子もつれを通じた、量子情報の観点からの場の量子論の理解

# 今後の方向性

## これからの課題

- 有限温度領域における解析

エンタングルメントネガティビティはある温度以上でゼロになるネガティビティが消失すると有限温度相転移の解析ができないため、消失温度の体積依存性、部分系形状依存性を解析する必要がある

- より一般の部分系配置での計算

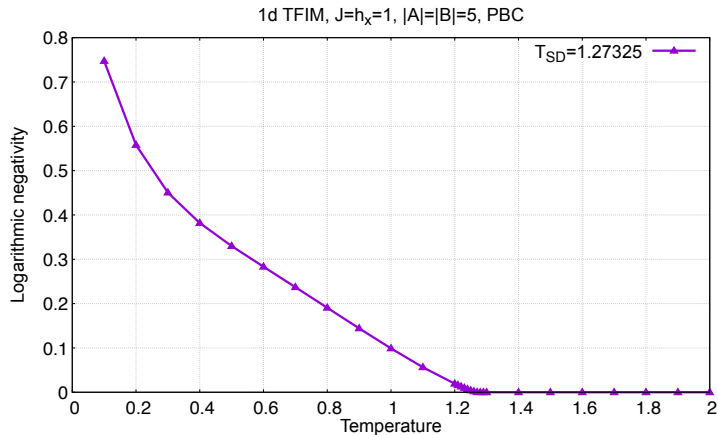
半空間に限らない任意サイズの部分系、離れて配置された部分系、3分割された系の2つの部分系のネガティビティ

- 高次元系への拡張

- 場の量子論への適用

## Backup: 有限温度領域における消失

小さな系での厳密対角化の結果:

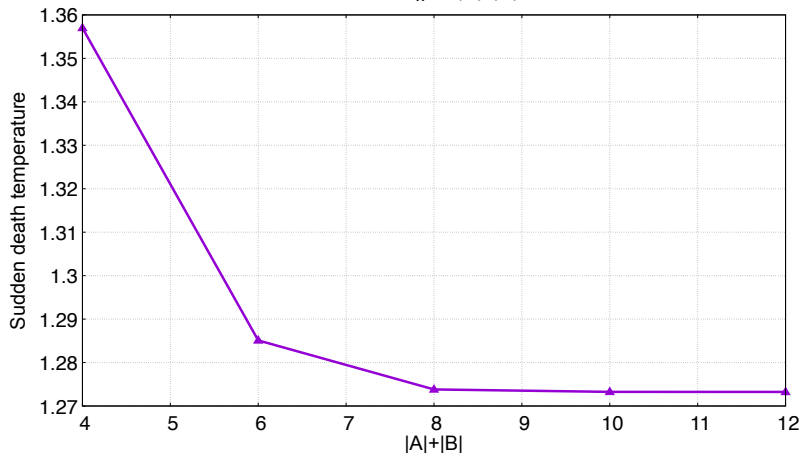


ある温度  $T_{SD}$  以上でゼロになることが知られている

## Backup: 消失温度 $T_{SD}$ の体積依存性

ある程度大きな体積では  $T_{SD}$  は体積にほぼ依存しない

1d TFIM,  $J=h_x=1$ ,  $|A|=|B|$ , PBC



## Backup: 消失温度 $T_{SD}$ の部分系形状依存性

$T_{SD}$  は部分系  $A, B$  の長さの比に依存する

