

ヤコビ型ランダム行列の固有値比分布 とカイラル対称性

西垣 真祐
島根大学

[1] SN, arXiv:2609.*****

[2] SN, PTEP **2026**, 023A02 (2026)

[3] Forrester-SN, J. Phys. A **59**, 135203 (2026)

離散的手法による場と時空のダイナミクス 2026
理化学研究所 R-CCS, 神戸, 2026.9.7~11

- 1 Motivation & Summary
- 2 Det process, Jánosy density & TW
- 3 Eigenphase-ratio distribution
- 4 L-function zeros

Motivation & Summary

Motivation : 量子カオス

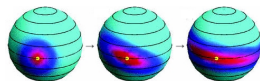
Floquet 演算子

周期駆動系： $|\Psi(nT)\rangle = \hat{U}(T)^n |\Psi(0)\rangle$, $\hat{U}(T) = \mathcal{T} \exp \left(-i \int_0^T dt \hat{H}(t) \right)$

例：**AI, A** Kicked Top (J : spin j 表現行列)

$$\mathcal{U} = \underbrace{\exp \left(i \frac{\kappa}{2j} J_x^2 \right)}_{x \text{ 方向の撃力}} \underbrace{\exp \left(i \gamma J_z \right)}_{z \text{ 軸周りの歳差}} = \mathcal{U}^T \quad (\mathbf{AI})$$

$$\mathcal{U} = \exp \left(i \frac{\kappa}{2j} J_x^2 \right) \underbrace{\exp \left(i (\gamma J_z + \alpha J_x) \right)}_{\text{一般軸周りの歳差}} \neq \mathcal{U}^T \quad (\mathbf{A})$$



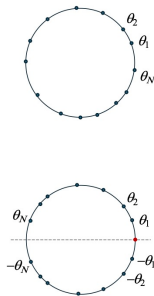
例：**AIII** Floquet SSH loop drive 模型 非局在状態をもつ 1D **bipartite** topol. 絶縁体

$$\hat{H}(t) = \begin{cases} + \sum_n (|n\rangle \langle n| + \text{h.c.}) & 0 \leq t < \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi < t \leq 2\pi \\ - \sum_n (|n+1\rangle \langle n| + \text{h.c.}) & \frac{1}{2}\pi \leq t \leq \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$
$$+ \delta(t \bmod 2\pi) \sum_n (\phi_n |n\rangle \langle n| + \phi_n |n\rangle \langle n|) \quad (\phi_n : \text{i.i.d. 乱数})$$



Riemann 対称空間 Cartan 1926 (centennial!)

class	compact Lie 群/極大部分群	$\mathcal{T}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{P}$
A	$U(N) \times U(N)/U(N)$			
AI	$U(N)/O(N)$	+		
AII	$U(2N)/Sp(N)$	-		
BD	$O(N) \times O(N)/O(N)$		+	
C	$Sp(N) \times Sp(N)/Sp(N)$		-	
AIII	$U(N + N')/U(N) \times U(N')$			+
BDI	$O(N + N')/O(N) \times O(N')$	+	+	+
CII	$Sp(N + N')/Sp(N) \times Sp(N')$	-	-	+
CI	$Sp(N)/U(N)$	+	-	+
DIII	$SO(2N)/U(N)$	-	+	+



AI $U(N)/O(N) \ni$ 同値類 $\{U \sim UO\} \mapsto$ 類関数 $\mathcal{U} = UU^T \in$ 対称 $U(N)$

$\mathcal{TCP}$ 対称性: $\mathcal{T}\mathcal{U}\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{U}^\dagger$ ($\mathcal{T}^2 = +\mathbb{I}$), $\mathcal{C}\mathcal{U}\mathcal{C}^{-1} \neq \mathcal{U}$, $\mathcal{P}\mathcal{U}\mathcal{P}^{-1} \neq \mathcal{U}^\dagger$
 $\mathcal{T} = * : \text{反ユニタリ}$ $\mathcal{C} : \text{反ユニタリ}$ $\mathcal{P} : \text{ユニタリ}$

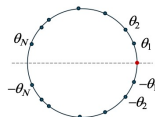
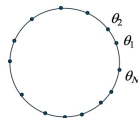
AIII $U(2N)/U(N) \times U(N) \ni \{U \sim U \text{diag}(u, u')\} \mapsto$ 類関数 $\mathcal{U} = \mathcal{U}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{U}^\dagger\mathcal{P}$

$\mathcal{TCP}$ 対称性: $\mathcal{T}\mathcal{U}\mathcal{T}^{-1} \neq \mathcal{U}^\dagger$, $\mathcal{C}\mathcal{U}\mathcal{C}^{-1} \neq \mathcal{U}$, $\mathcal{P}\mathcal{U}\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{U}^\dagger$ $\mathcal{P} = \text{diag}(\mathbb{I}, -\mathbb{I})$

ランダム行列模型

円周型ランダム行列 $\stackrel{\text{def}}{=} \text{compact 対称空間上の均一分布}$ Altland-Zirnbauer 1997

class	G/K	β	a	b
A	$U(N)$	2		
AI	$U(N)/O(N)$	1		
AII	$U(2N)/Sp(N)$	4		
BD	$O^{\pm}(N_{e,o})$	2	$\mp 1/2$	$\mp 1/2$
C	$Sp(N)$	2	$1/2$	$1/2$
AIII	$U(N + N')/U(N) \times U(N')$	2	ν	0
BDI	$O(N + N')/O(N) \times O(N')$	1	$\nu - 1$	-1
CII	$Sp(N + N')/Sp(N) \times Sp(N')$	4	$\nu + 1/2$	$1/2$
CI	$Sp(N)/U(N)$	1	0	0
DIII	$SO(2N_{e,o})/U(N_{e,o})$	4	0, $1/2$	0



Weyl 積分公式 1925/26 (also centennial)

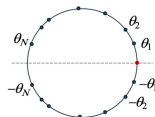
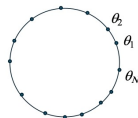
$$d\mu(\mathcal{U})_{G/K} \propto \prod_{i=1}^{\text{rank}(G/K)} d\theta_i \cdot \prod_{\alpha \in \Sigma_+} \left| 1 - e^{i\alpha(\theta)} \right|^{m(\alpha)}$$

$\theta \in \text{Cartan}$, Σ : 制限ルート系, $m(\alpha)$: 実多重度

ランダム行列模型

円周型ランダム行列 $\stackrel{\text{def}}{=} \text{compact 対称空間上の均一分布}$ Altland-Zirnbauer 1997

class	G/K	β	a	b
A	$U(N)$	2		
AI	$U(N)/O(N)$	1		
AII	$U(2N)/Sp(N)$	4		
BD	$O^\pm(N_{e,o})$	2	$\mp 1/2$	$\mp 1/2$
C	$Sp(N)$	2	$1/2$	$1/2$
AIII	$U(N + N')/U(N) \times U(N')$	2	ν	0
BDI	$O(N + N')/O(N) \times O(N')$	1	$\nu - 1$	-1
CII	$Sp(N + N')/Sp(N) \times Sp(N')$	4	$\nu + 1/2$	$1/2$
CI	$Sp(N)/U(N)$	1	0	0
DIII	$SO(2N_{e,o})/U(N_{e,o})$	4	0, $1/2$	0



$$d\mu(\mathcal{U})_{G/K}^{\text{nonchiral}} \propto \prod_i d\theta_i \cdot \prod_{j < k} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^\beta$$

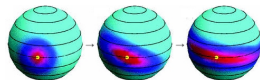
$$\begin{aligned}
 d\mu(\mathcal{U})_{G/K}^{\text{chiral}} &\propto \prod_i d\theta_i \sin(\theta_i/2)^{\beta a + 1} \cos(\theta_i/2)^{\beta b + 1} \cdot \prod_{j < k} |\cos \theta_j - \cos \theta_k|^\beta \\
 &\propto \prod_i d\lambda_i (1 - \lambda_i)^{\frac{\beta a}{2}} (1 + \lambda_i)^{\frac{\beta b}{2}} \cdot \prod_{j < k} |\lambda_j - \lambda_k|^\beta = d\mu(\{\lambda\})_{\text{Jacobi}}^{(\beta, a, b)}
 \end{aligned}$$

Floquet 演算子

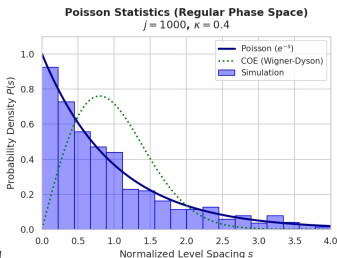
周期駆動系： $|\Psi(nT)\rangle = \hat{U}(T)^n |\Psi(0)\rangle$, $\hat{U}(T) = \mathcal{T} \exp\left(-i \int_0^T dt \hat{H}(t)\right)$

例：**AI** Kicked Top

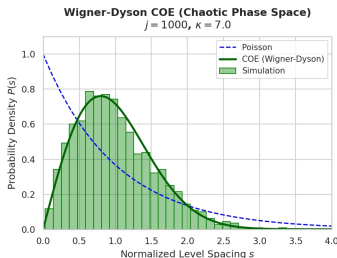
$$\mathcal{U} = \underbrace{\exp\left(i \frac{\kappa}{2j} J_x^2\right)}_{x \text{ 方向の撃力}} \underbrace{\exp\left(i \gamma J_z\right)}_{z \text{ 軸周りの歳差}} = \mathcal{U}^T$$



隣接する固有位相の間隔分布 $P(s)$



弱い撃力



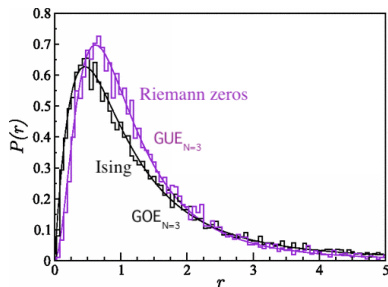
強い撃力

固有値間隔比分布

準位統計 in スペクトルバルク

Wigner $\leftrightarrow$ Poisson as カオス $\leftrightarrow$ 可積分・局在

- 形状因子 $g(t) = \langle |\sum_n e^{iE_n t}|^2 \rangle$
- 固有値間隔分布 $P(s)$, $s_n := \bar{\rho}(E_n)(E_{n+1} - E_n)$ ✓ 状態密度による unfolding 不要
- 固有値間隔比分布 $P_r(r)$, $r_n := \frac{E_{n+1} - E_n}{E_n - E_{n-1}}$ Oganessian-Huse 2007



$N = 3$: Atas-Bogomolny-Giraud-Roux 2013

My contributions:

- ① $N \rightarrow \infty$ 極限を解析的に導出 ✓
- ② 有限 N 補正を導出 ✓
- ③ カイラル対称な U のスペクトル端に拡張 ✓
- ④ ②+③ [今回]

Summary : 非カイラル型 [前回]

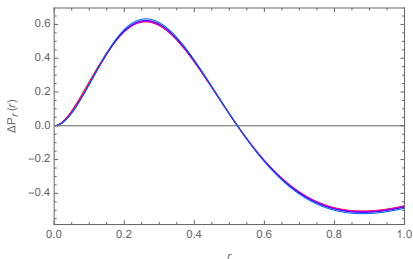
$$\begin{array}{l} \text{カーネル} \\ \text{核} \end{array} \quad \frac{1}{N} K_{A_N}(\theta, \theta') \Big|_{\theta=\frac{x}{N}} = \overbrace{K^{\text{Sin}}(x, x')}^{A_\infty} + \overbrace{\frac{1}{N^2} K^{(2)}(x, x') + \frac{1}{N^4} K^{(4)}(x, x') + \dots}^{\text{有限 } N \text{ 補正}}$$

↓

$$\text{固有値間隔分布 } P(\Delta\theta) \Big|_{\Delta\theta=\frac{s}{N}} = P^{\text{Sin}}(s) + \frac{1}{N^2} P^{(2)}(s) + \frac{1}{N^4} P^{(4)}(s) + \dots$$

$$\text{固有値間隔比分布} \quad P_r(r) = P_r^{\text{Sin}}(r) + \frac{1}{N^2} P_r^{(2)}(r) + \frac{1}{N^4} P_r^{(4)}(r) + \dots$$

would-be leading 補正=0



$N^4(P_r(r) - P_r^{\text{Sin}}(r))$
for A_N , $N = 8, \dots, 16$

Summary : カイラル型 [今回]

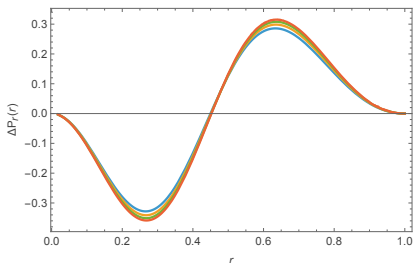
$$\begin{array}{l} \text{カーネル} \\ \text{核} \end{array} \quad \frac{1}{N} K_{\text{JUE}_N}(\theta, \theta') \Big|_{\theta=\frac{x}{N}} = \overbrace{K_{\text{Bes}}(x, x')}^{\text{JUE}_\infty} + \overbrace{\frac{1}{N^{1,2,3}} K^{(1,2,3)}(x, x') + \frac{1}{N^4} K^{(4)}(x, x') + \dots}_{\text{有限 } N \text{ 補正}}$$

$$\Downarrow$$

$$1^{\text{st}} \text{ 固有位相分布 } P_1(\theta_1) \Big|_{\theta_1=\frac{x}{N}} = P_1^{\text{Bes}}(x) + \frac{1}{N^{1,2,3}} P_1^{(1,2,3)}(x) + \frac{1}{N^4} P_1^{(4)}(x) + \dots$$

$$1^{\text{st}}/2^{\text{nd}} \text{ 固有位相比分布 } P_r(r) = P_r^{\text{Bes}}(r) + \frac{1}{N^{1,2,3}} P_r^{(1,2,3)}(r) + \frac{1}{N^4} P_r^{(4)}(r) + \dots$$

3 would-be leading 補正=0



$N^4(P_r(r) - P_r^{\text{Bes}}(r))$
for C_N , $N = 6, \dots, 12$

2 Det process, Jánossy density & TW

固有値分布 例: Legendre $P_\ell(\lambda) = P_\ell^{(0,0)}(\cos \theta)/\sqrt{h_\ell}$

$$\begin{aligned} \text{JPD}_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) &\propto \prod_{j < k}^N (\lambda_j - \lambda_k)^2 = \det_{j,\ell}[\lambda_j^\ell] \det_{k,\ell}[\lambda_k^\ell] \\ &\propto \det_{j,\ell}[P_\ell(\lambda_j)] \det_{\ell,k}[P_\ell(\lambda_k)] = \det_{j,k} \left[\sum_{\ell=0}^{N-1} P_\ell(\lambda_j) P_\ell(\lambda_k) \right] \\ &\stackrel{\text{漸化式}}{=} \det \left[\underbrace{r_N \frac{P_N(\lambda_j) P_{N-1}(\lambda_k) - P_{N-1}(\lambda_j) P_N(\lambda_k)}{\lambda_j - \lambda_k}}_{K(\lambda_j, \lambda_k)} \right]_{j,k=1}^N \end{aligned}$$

$K(\lambda_j, \lambda_k)$: カーネル可積分核

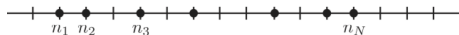
$$\Rightarrow R_p(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = \det[K(\lambda_j, \lambda_k)]_{j,k=1}^p \quad \text{by} \quad \int_{-1}^1 d\lambda K(\lambda, \lambda) = N, \quad K * K = K$$

行列式点過程 (連続的 DPP)

$$\Rightarrow \Pr(\text{no EV in } I) \stackrel{!}{=} \text{Det}(\mathbb{I} - \mathbf{K}|_I) \quad (\mathbf{K}|_I f)(\lambda) = \int_I d\lambda' K(\lambda, \lambda') f(\lambda')$$

$$\Pr(\text{no EV in } [-1, s]) = \tau_{\text{PVI}}(s)_{v_1=v_3=N}^{v_2=v_4=0}, \quad \delta_s^2 \log \tau_N = \frac{\tau_{N+1} \tau_{N-1}}{\tau_N^2} \quad \text{Forrester-Witte 2004}$$

離散的 DPP



$$\text{Prob}(n_1, \dots, n_p \text{ に粒子あり}) = \det[K(n_j, n_k)]_{j,k=1}^p$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Prob}(n \text{ に粒子がない}) = 1 - K(n, n)$$

n と n' に粒子がある引き過ぎを補正

$$\begin{aligned} \text{Prob}(n, n' \text{ に粒子がない}) &= 1 - K(n, n) - K(n', n') + \overbrace{\begin{vmatrix} K(n, n) & K(n, n') \\ K(n', n) & K(n', n') \end{vmatrix}} \\ &= \begin{vmatrix} 1 - K(n, n) & -K(n, n') \\ -K(n', n) & 1 - K(n', n') \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Prob}(n, n', n'' \text{ に粒子がない}) = \dots$$

$$\text{Prob}(\text{集合 } I \text{ に粒子がない}) = \det(\mathbb{I} - [K(n, n')]_{n, n' \in I})$$

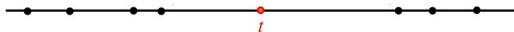
$\Downarrow$ 連続極限 $\lambda := \epsilon n, \epsilon \rightarrow 0$

$$\text{Prob}(\text{区間 } I \text{ に固有値がない}) \stackrel{!}{=} \text{Det}(\mathbb{I} - \mathbf{K}|_I)$$

条件付き DPP

1 つの固有値を $x = t$ に固定 $\Rightarrow$ 残りの固有値の条件付き確率分布も DPP

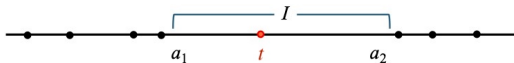
$$\tilde{K}(x, x') = K(x, x') - \frac{K(x, t)K(t, x')}{K(t, t)}$$



Jánossy 密度

区間 $I = [a_1, a_2]$ が t を除いて 固有値を含まない確率密度

$$J_1(I|t) = K(t, t) \text{Det} (\mathbb{I} - \tilde{K}|_I)$$



Tracy-Widom 法

Theorem [Tracy-Widom 1994]

神保-三輪-毛利-佐藤 1980 の一般化

① 可積分核: $K(x, x') = \frac{1}{x - x'} [\varphi(x) \ \psi(x)] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(x') \\ \psi(x') \end{bmatrix} = \frac{\Psi(x)^T J \Psi(x')}{x - x'}$

② 2 成分関数 $\Psi(x)$ が有理係数 1 階 LDE を満たす:

$$(\partial_x + \mathcal{A}(x))\Psi(x) = 0, \quad \text{tr } \mathcal{A}(x) = 0$$

ならば, $\text{Det}(\mathbb{I} - \mathbf{K}|_{[a_1, a_2]})$ は $\mathcal{A}(x)$ の係数を含む PDE 系 in a_1, a_2 により決定される

Lemma [SN 2021]

核 $K(x, x')$ が TW 法の適用条件 ①② を満たすならば, 条件付き核 $\tilde{K}(x, x')$ も満たす

Proof.

固定された点 t を避ける

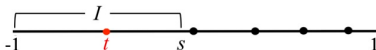
$$\tilde{\Psi}(x) = \Psi(x) - \overbrace{\Psi(t) \frac{K(t, x)}{K(t, t)}} := \Omega(x)\Psi(x), \quad \Omega(x) = \mathbb{I} - \frac{\Psi(t)\Psi(t)^T J}{K(t, t)(t - x)} : \text{有理 SL}(2) \text{ ゲージ変換}$$

により条件付き核は $\tilde{K}(x, x') = \frac{\tilde{\Psi}(x)^T J \tilde{\Psi}(x')}{x - x'}$ と表され,

$$(\partial_x + \tilde{\mathcal{A}}(x))\tilde{\Psi}(x) = 0, \quad \text{tr } \tilde{\mathcal{A}}(x) = \text{tr} \{ \Omega(x)\mathcal{A}(x)\Omega(x)^{-1} - \partial_x \Omega(x) \cdot \Omega(x)^{-1} \} = 0 \quad \square$$

3 Eigenphase-ratio distribution

$$\tilde{J}_1([0, s]; t) = \text{Det}(\mathbb{I} - \tilde{K}_{\text{Jacobi}}|_{[-1, s]})$$



$$\Psi(\lambda) = \sqrt{w(\lambda)} \begin{bmatrix} P_N^{(a,b)}(\lambda) \\ P_{N-1}^{(a,b)}(\lambda) \end{bmatrix} \text{ は TW 法の適用条件を満たす } t \text{ を固定 } \tilde{\Psi}(\lambda) \text{ も満たす}$$

$$\Rightarrow \text{Det}(\mathbb{I} - \tilde{K}_{\text{Jacobi}}|_{[-1, s]}) \text{ は ODE 系により決定}$$

$$(\log \text{Det}(\mathbb{I} - \tilde{K}|_{[-1, s]}))' = q_0 p_0' - p_0 q_0' \quad [' = d/ds, \quad \alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \mu_j : t, N, a, b \text{ に依存する係数}]$$

$$(1 - s^2)(s - t)^2 q_0' = - \sum_{k+\ell \leq 2} (k+1) \mu_{k+\ell+2} (v_k q_\ell - u_k p_\ell)$$

$$+ \sum_{j=0}^3 \left(\alpha_j + \sum_{k=0}^2 \alpha_{j+k+1} v_k + \sum_{k=0}^1 \gamma_{j+k+1} u_k \right) q_j + \sum_{j=0}^2 \left(\beta_j + \sum_{k=0}^2 \alpha_{j+k+1} u_k + \sum_{k=0}^1 \beta_{j+k+1} v_k \right) p_j$$

$$(1 - s^2)(s - t)^2 p_0' = - \sum_{k+\ell \leq 2} (k+1) \mu_{k+\ell+2} (w_k q_\ell - \tilde{v}_k p_\ell)$$

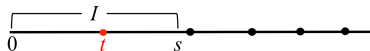
$$+ \sum_{j=0}^2 \left(-\gamma_j + \sum_{k=0}^2 \alpha_{j+k+1} w_k + \sum_{k=0}^1 \gamma_{j+k+1} \tilde{v}_k \right) q_j + \sum_{j=0}^3 \left(-\alpha_j + \sum_{k=0}^2 \alpha_{j+k+1} \tilde{v}_k + \sum_{k=0}^1 \beta_{j+k+1} w_k \right) p_j$$

$$q_j = s^j q_0 - \sum_{k+\ell=j-1} (v_k q_\ell - u_k p_\ell), \quad p_j = s^j p_0 - \sum_{k+\ell=j-1} (w_k q_\ell - \tilde{v}_k p_\ell) \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$u_j' = q_0 q_j, \quad v_j' = q_0 p_j, \quad w_j' = p_0 p_j \quad (j = 0, 1, 2), \quad \tilde{v}_j = v_j - \sum_{k+\ell=j-1} (v_k \tilde{v}_\ell - u_k w_\ell) \quad (j = 0, 1, 2)$$

$$\tilde{J}_1([0, s]; t) = \text{Det}(\mathbb{I} - \tilde{K}_{\text{Bessel}}|_{[0, s]})$$

SN 2021



局所漸近形

$$N^{-a} P_N^{(a, b)}(\cos \theta) \Big|_{\theta = \frac{x}{N}} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-a} J_a(x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \quad \frac{1}{N} K_{\text{Jacobi}_N}(\theta, \theta') \rightarrow K_{\text{Bessel}}(x, x')$$

$$\text{前弁の式} \rightarrow (\log \text{Det}(I - \tilde{K}|_{[0, s]}))' = q_0 p_0' - p_0 q_0' \quad [' = d/ds, \quad \alpha_j, \beta_j, \gamma_j : t, a \text{ に依存する係数}]$$

$$s(s-t)^2 q_0' = \sum_{j=0}^2 \left(\alpha_j + \sum_{k=0}^1 \alpha_{j+k+1} v_k + \sum_{k=0}^2 \gamma_{j+k+1} u_k \right) q_j + 2t v_0 q_0 - 2v_1 q_0 - v_0 q_1$$

$$+ \sum_{j=0}^2 \left(\beta_j + \sum_{k=0}^1 \alpha_{j+k+1} u_k + \sum_{k=0}^1 \beta_{j+k+1} v_k \right) p_j - 2t u_0 p_0 + 2u_1 p_0 + u_0 p_1$$

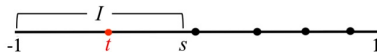
$$s(s-t)^2 p_0' = \sum_{j=0}^3 \left(-\gamma_j + \sum_{k=0}^1 \alpha_{j+k+1} w_k + \sum_{k=0}^2 \gamma_{j+k+1} \tilde{v}_k \right) q_j + 2t w_0 q_0 - 2w_1 q_0 - w_0 q_1$$

$$+ \sum_{j=0}^2 \left(-\alpha_j + \sum_{k=0}^1 \alpha_{j+k+1} \tilde{v}_k + \sum_{k=0}^1 \beta_{j+k+1} w_k \right) p_j - 2t \tilde{v}_0 p_0 + 2\tilde{v}_1 p_0 + \tilde{v}_0 p_1$$

$$q_j = s^j q_0 - \sum_{k+\ell=j-1} (v_k q_\ell - u_k p_\ell) \quad (j = 1, 2, 3), \quad p_j = s^j p_0 - \sum_{k+\ell=j-1} (w_k q_\ell - \tilde{v}_k p_\ell) \quad (j = 1, 2)$$

$$\tilde{v}_j = v_j - \sum_{k+\ell=j-1} (v_k \tilde{v}_\ell - u_k w_\ell), \quad u_j' = q_0 q_j, \quad v_j' = q_0 p_j \quad (j = 0, 1, 2), \quad w_j' = p_0 p_j \quad (j = 0, 1)$$

固有位相の連結分布 : A_{III}, BD, C_N



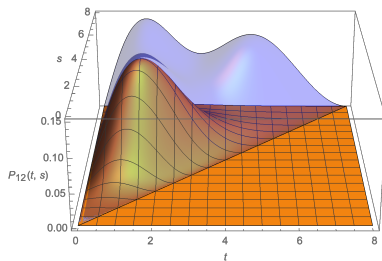
1st & 2nd 固有値の連結分布

$$P_{12}(t, s) = -\partial_s J_1([-1, s]; t) \quad \begin{array}{l} t = -\cos \theta_1 \\ \Rightarrow \\ s = -\cos \theta_2 \end{array}$$

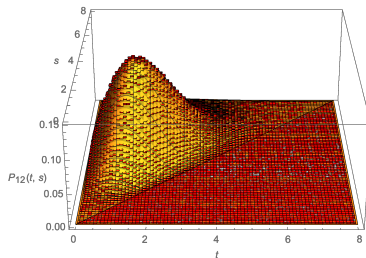
固有位相—

固有位相比分布

$$P_{12}(\theta_1, \theta_2) \Rightarrow P_r(r), \quad r = \theta_1/\theta_2$$



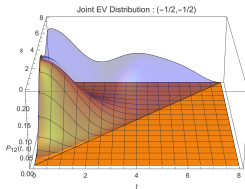
$A_{III_{N,N}} : P_{12}(\theta_1, \theta_2), R_2(\theta_1, \theta_2)$



$A_{III_{N,N}} (N = 128)$: 数値対角化

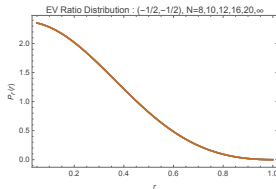
固有位相比分布 : $A_{III}, BD, C_{N=6,8,10,12,\dots}$

$$P_{12}(\theta_1, \theta_2)$$

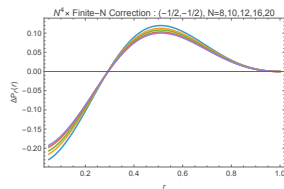


D_N

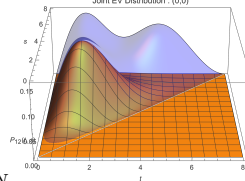
$$P_r(r = \theta_1/\theta_2)$$



$$N^4(P_r(r) - P_r^{\text{Bessel}}(r))$$

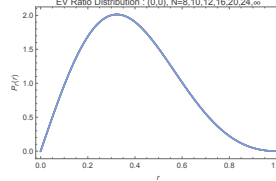


Joint EV Distribution : $(0,0)$

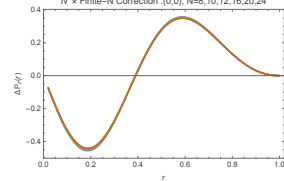


$A_{III,N,N}$

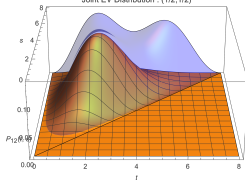
EV Ratio Distribution : $(0,0), N=8,10,12,16,20,24,\infty$



$N^4 \times \text{Finite-}N \text{ Correction} : (0,0), N=8,10,12,16,20,24$

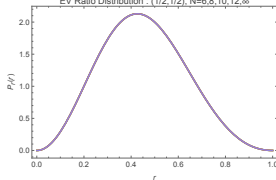


Joint EV Distribution : $(1/2, 1/2)$

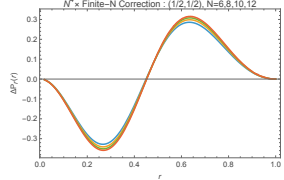


C_N

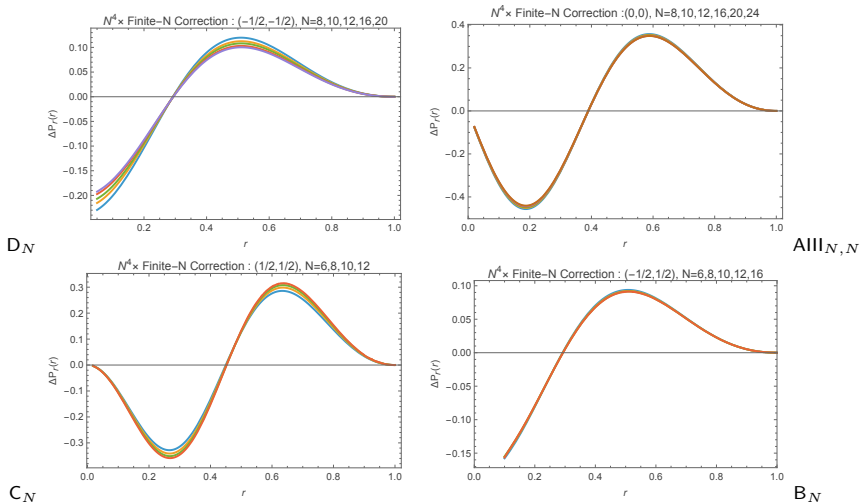
EV Ratio Distribution : $(1/2, 1/2), N=6,8,10,12,\infty$



$N^4 \times \text{Finite-}N \text{ Correction} : (1/2, 1/2), N=6,8,10,12$



固有位相比分布：有限 N 補正



- $N^4(P_{N,r}^{\text{Jac}(a,b)}(r) - P_r^{\text{Bes}(b)}(r))$ が収束 $\Leftarrow$ 固有位相相関の $\mathcal{O}(1/N^{1,2,3})$ 項は全て相殺 highly nontrivial!
- Jacobi 指数 $a + b = 0$ の場合： $1/N$ 展開でなく $1/N^2$ 展開 $\Rightarrow$ 次項 $\mathcal{O}(1/N^6)$, 早い収束

4 L-function zeros

Riemann 明示公式

$$N_{\text{H}}(t) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \log \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = -\frac{1}{\pi} \sum_{p: \text{素数}} \text{Im} \log(1 - p^{-1/2 - it})$$

$$= -\frac{1}{\pi} \sum_{p: \text{素数}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(m t \log p)}{m \sqrt{e^{m \log p}}} \quad \text{Montgomery 予想} \Rightarrow A_{\infty}$$

Gutzwiller 跡公式

$$\rho(E) = \text{tr} \delta(E - \hat{H}) \xrightarrow{\text{FT}} \int d\mathbf{q} \langle \mathbf{q} | e^{-iT\hat{H}} | \mathbf{q} \rangle = \int_{q(T)=q(0)} \mathcal{D}\mathbf{q} e^{iS[\mathbf{q}]} \quad A_{\infty}$$

WKB 近似 ↓ X-chaotic ↑ Müller 2005

$$N_{\text{H}}(E) = \int^E dE' (\rho(E') - \bar{\rho}(E')) \simeq \frac{1}{\pi} \sum_{p: \text{素周期軌道}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(mS_p(E) - (m\pi/2)\mu_p)}{m \sqrt{e^{m\lambda T_p}}}$$

素周期軌道 $\leftrightarrow$ 素数, $E_n \leftrightarrow t_n$, $S_p(E) \leftrightarrow t \log p$, $T_p = \frac{dS_p(E)}{dE} \leftrightarrow \log p$, $\lambda \leftrightarrow 1$ 対応

$\zeta(s) \stackrel{\text{予想}}{=} \text{量子カオスの } \hat{U} \text{ の特性多項式}$ Berry 1980s~

L 関数零点

Euler 積表示 $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-s} = \prod_{p: \text{素数}} (1 - p^{-s})^{-1}$ を保つように ζ 関数を捻る $\Rightarrow$ L 関数

Dirichlet $L(s, \chi) = \sum_n \frac{\chi(n)}{n^s}$

原始指標 $\uparrow \chi(n)\chi(m) = \chi(nm) \bmod d$

Ramanujan $L_f(s, \chi) = \sum_n \tau(n) \frac{\chi(n)}{n^{s+a}}$

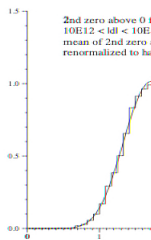
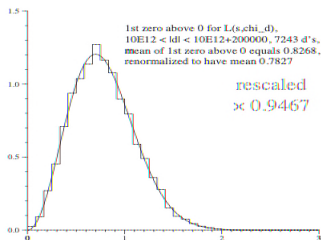
etc.

保形関数 $\uparrow f(q) = \sum_n \tau(n) q^n$

Katz-Sarnak 予想 1999

$L(s, \chi), L_f(s, \chi), \dots$ の小さい零点を d について平均 $\Rightarrow$ B,D,C の小さい固有位相分布

$L(s, \chi_d)$ の 1st, 2nd 零点 vs C_∞ の 1st, 2nd 固有値 $10^{12} < |d| < 10^{12} + 10^5$ **Rubinstein 1998**

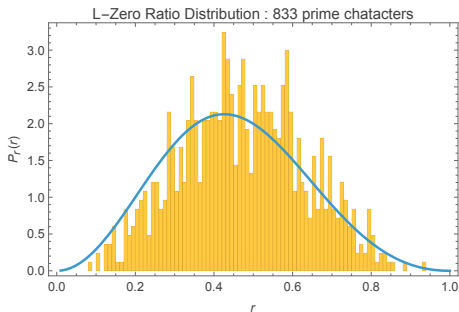


提案：個別零点 t_1, t_2 の分布ではなく $P_r(t_1/t_2)$ を用いて heuristic な rescaling を回避！

Dirichlet $L(s, \chi_d)$: 1st, 2nd 零点比分布

(Preliminary)

$$P_r(t_1/t_2) \quad \text{vs} \quad P_r^C(\theta_1/\theta_2)$$



$$3200 < |d| < 6400$$

導手 d が小さすぎ & 統計不足 (有限サイズ効果どころではない)

Summary & Outlook

- カイラル対称性をもつ対称空間 (AIII, B, D, C : ランク N) 上の一様分布から, 1st, 2nd 固有位相の連結分布 $P_{12}(\theta_1, \theta_2)$ ・ 比の分布 $P_r(\theta_1/\theta_2)$ を導出 [左図]
- 固有位相比分布 $P_r(r)$ では $\mathcal{O}(N^{-(1,2,3)})$ 補正が相殺し, $\mathcal{O}(N^{-4})$ が見える [右図]
⇒ カイラル対称な Floquet 演算子から系固有な有限サイズ効果を抽出する基盤
- カイラル対称な数論的カオス系 = L 関数零点統計の有限 d 補正 に適用したい
- 円周型ランダム行列の Jánossy 密度 $\stackrel{?}{=}$ 戸田格子階層の τ 関数 を検証したい

